

SABINO ANIZAR

ARITMÉTICA

ELEMENTAL



LIBRERÍA DE LA V^{DA} DE C. BOURET.

PARÍS

MÉXICO

2 e Visconti.

45, Avenida Cinco de Mayo.

ARITMÉTICA ELEMENTAL

SABINO ANÍZAR

ARITMÉTICA ELEMENTAL

DEDICADA

AL PROFESORADO MEXICANO

Obra de texto

en las Escuelas Nacionales del Distrito Federal, Territorios de Tepic y Baja California
y de varios Estados de la República.

15^a Edición completamente reformada.



LIBRERÍA DE LA V^{DA} DE C. BOURET

PARÍS

23, RUE VISCONTI, 23

MÉXICO

45, AVENIDA CINCO DE MAYO, 45

1912

Propiedad del Editor.

Quedan asegurados los derechos de propiedad
conforme á la ley.

ARITMÉTICA ELEMENTAL

NOCIONES PRELIMINARES

1. — **Aritmética**¹ es la ciencia de los números.

Esta ciencia nos enseña á *contar* y á *calcular*. Se cuenta cuando se dice *uno, dos, tres, cuatro, cinco....* y se calcula cuando se dice *dos y siete son nueve, ó cuatro veces cinco son veinte*, etc.

2. — **Número**² es el resultado de la comparación de una *cantidad* cualquiera con otra de su misma especie, tomada como *unidad*.

3. — **Cantidad**³ es todo lo que puede aumentar ó disminuir, como un vaso de agua, la intensidad de la luz; el valor de las cosas, el tiempo, etc.

4. — La cantidad puede ser *abstracta* ó *concreta*.

5. — **Cantidad abstracta** es la que no puede

1. La palabra *Aritmética* se deriva de la raíz griega *arithmós* (número), y de la terminación griega, *iquéé*, que significa *relativo á....*

2. Del nombre latino *numerus*, número.

3. Del adjetivo latino *quantus*, cuánto, ¿de qué magnitud?

valuar se numéricamente, como el dolor, la pereza, la aplicación, etc.

6. — **Cantidad concreta** es la que se puede valuar numéricamente, como la distancia, el peso de los cuerpos, el tiempo, etc.

7. — **Unidad** es una cantidad que se elige para valuar ó medir todas las de su especie.

Si, por ejemplo, se trata de medir una línea, la longitud que se tome como término de comparación será la *unidad*.

Si se quiere saber lo que pesa un objeto, el peso que se emplee como término de comparación será la *unidad*.

En estos casos la unidad es arbitraria.

Si se quieren contar los árboles de una calzada, los niños de un colegio, etc., la *unidad* será el árbol, el niño, etc.

En este caso la unidad se ha dado por la naturaleza.

8. — Los números pueden ser, *en cuanto á su formación* : enteros, quebrados ó fraccionarios, y *en cuanto al modo de enunciarlos* : abstractos ó concretos, complexos ó incomplexos, homogéneos ó heterogéneos, dígitos ó compuestos.

9. — Número **entero**¹ es el que se compone de unidades completas, como *dos* kilogramos, *ocho* litros.

10. — Número **quebrado**² ó **fracción**³ es el que se compone de parte ó partes de la unidad, como un *quinto* de peso; *ocho centésimos* de litro.

11. — Número **mixto** ó **fraccionario** es el

1. Del latín *integer*, integro, intacto, de *in*, sin, y *tangere*, tocar.

2. Del verbo *quebrar*, derivado por metátesis de *crepare*, romper, quebrar con ruido.

3. Del nombre latino *fractio*.

que se compone de unidades completas y de partes de la unidad, como *nueve metros dos tercios*; *siete metros catorce centésimos*.

12. — Número **abstracto**¹ es el que no tiene especie, como 8; y **concreto**² el que la tiene, como 8 hombres.

13. — Números **complexos** ó **denominados** son aquellos que contienen unidades de diferente especie, pero que pueden reducirse á una sola, como 2 días, 5 horas, 7 minutos.

14. — Números **incomplexos** son los de diferente especie que no se pueden reducir á una sola, como 7 pesos, 3 mesas.

15. — Números **homogéneos**³ son los que tienen la misma especie, como 4 libros y 7 libros; 4 decenas y 7 decenas.

16. — Números **heterogéneos**⁴ son los que tienen diferentes especies, como 4 litros y 7 pizarras, ó 4 decenas y 7 millares.

17. — Números **dígitos** son los que constan de una sola cifra, como 6; y **compuestos** los que constan de varias, como 375.

18. — Los quebrados se dividen en *comunes* y *decimales*.

19. — Los quebrados comunes se representan

1. Del participio latino *abstractus*, derivado de *abstraho*, separar.

2. Del participio latino *concretus*, coagulado, espeso, consistente.

3. De las raíces griegas *homos*, semejante, y *géneo*, género.

4. Del griego *héteros*, otro, diferente, y de *géneo*, género.

con dos cantidades, una sobre otra, separadas por una línea. Ejemplo : $\frac{5}{9}$.

20. — La cantidad que está sobre la línea se llama **numerador** ¹, porque *numera* las partes que se han tomado de la unidad, y la que está debajo **denominador** ², porque *denomina* la partes iguales en que está dividida la unidad.

21. — Estos términos se leen, dándole al numerador su nombre *cardinal* : 4, 7 ó lo que sea, y al denominador su nombre *partitivo* : *mitad, tercio, cuarto etc.*; y desde el once en adelante, por su nombre cardinal, agregando la palabra *avos*. Así $\frac{5}{9}$ se se leerá : *cinco novenos*, y el quabrado $\frac{7}{16}$ se leerá siete quinceavos.

22. — En los quebrados decimales, el denominador es *tácito* é igual á la *unidad seguida de tantos ceros* como cifras tiene la decimal. Se distinguen de los enteros en que les precede una coma invertida; ejemplo : 0,75 (setenta y cinco centésimos); 0,004 (cuatro milésimos).

23. — Fracción decimal **periódica** es aquella que consta de grupos de cifras iguales dispuestas en el mismo orden y que se repiten indefinidamente; ejemplo : 0,75 75 75 75 75.... que se escribe abreviadamente : 0,(75); ó bien 0,467 348 348 348.... que se escribe abreviadamente 0,457(348).

24. — Si el período comienza inmediatamente después de la coma, como en 0,(476), se llama

1. De la palabra latina *número*, contar.

2. De la palabra latina *denómino*, nombrar.

fracción **periódica simple**; y si comienza una ó varias cifras después de la coma, como en 0,473 (38), se llama fracción **periódica mixta**.

Cuestionario.

¿Qué es Aritmética? 1. — ¿Cuál es el objeto de la Aritmética? 1. — ¿Qué es número? 2. — ¿Qué es cantidad? 3. — ¿En qué se divide la cantidad? 4. — ¿Qué es cantidad abstracta? 5. — ¿Qué es cantidad concreta? 6. — ¿Qué es unidad? 7. — ¿A qué se atiende para la división del número? 8. — ¿En qué se dividen los números en cuanto á su formación? 8. — ¿En qué se dividen los números en cuanto al modo de enunciarlos? 8. — ¿Qué es número entero? 9. — ¿Qué es número quebrado? 10. — ¿Qué es número mixto? 11. — ¿Qué es número abstracto? 12. — ¿Qué es número concreto? 12. — ¿Qué son números denominados ó complexos? 13. — ¿Qué son números incomplexos? 14. ¿Qué son números homogéneos? 15. — ¿Qué son números heterogéneos? 16. — ¿Qué son números dígitos? 17. — ¿Qué son números compuestos? 17. — ¿En qué se dividen los quebrados? 18. — ¿Cómo se representan los quebrados comunes? 19. — ¿A qué se llama numerador? 20. — ¿A qué se llama denominador? 20. — ¿Cómo se lee un quebrado común? 21. — ¿En qué se distinguen los quebrados comunes de los decimales? 22. — ¿En qué se distinguen los quebrados decimales de los enteros? 22. — ¿A qué se llama fracción decimal periódica? 23. — ¿Qué es fracción periódica simple? 24. — ¿Qué es fracción periódica mixta? 24.

(Exíjase al alumno un ejemplo en cada definición).

SISTEMA DE NUMERACIÓN

16

25. — **Sistema de numeración** es la parte de la Aritmética que trata del modo de *formar* los números, de *expresarlos* y *representarlos* por medio de pocas palabras y caracteres.

26. — Las **cifras**¹ ó guarismos de que nos valemos para contar, son :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
cero	uno	dos	tres	cuatro	cinco	seis	siete	ocho	nueve.

27. — El **cero**² representa la carencia de unidades.

La **unidad** natural ó fundamental se llama *uno*; la reunión de una unidad, más una unidad, se llama *dos*; la reunión de dos unidades, más una unidad, se llama *tres*; continuando del mismo modo se forman los números *cuatro*, *cinco*, *seis*, *siete*, *ocho* y *nueve*, los cuales reciben el nombre de *unidades simples*, ó *unidades de primer orden*.

1. De la palabra árabe *sifr*, que en un principio no designaba más que el cero; pero que más adelante se aplicó á los diez caracteres empleados para indicar los números.

2. De la palabra árabe *zeroh*, círculo.

28. — La reunión de nueve unidades, más una unidad, forma el *diez*, que constituye una nueva unidad llamada **decena**, ó *unidad de segundo orden*; y se cuenta por decenas del mismo modo que por unidades, diciendo : *una decena*, ó diez; *dos decenas*, ó veinte; *tres decenas*, ó treinta... *nueve decenas*, ó noventa.

29. — Combinando las decenas con las unidades, se forman los números : una decena y uno, ó sea diez y uno, que por el uso se llama *once*; una decena y dos, que se llama *doce*, etc.; hasta nueve decenas y nueve, ó noventa y nueve.

30. — Con el conjunto de diez decenas se forma una **centena**, ó *unidad de tercer orden*, y se cuenta con las centenas del mismo modo que con las unidades : *una centena*, ó cien; *dos centenas*, ó doscientos.... *nueve centenas*, ó novecientos, las cuales se combinan con las decenas y unidades para formar los números comprendidos del cien al novecientos noventa y nueve.

31. — Con el conjunto de diez centenas se forma una nueva unidad llamada **millar**, ó *unidad de cuarto orden*, que constituye la *clase de los millares*, y se cuenta con los millares del mismo modo que con las unidades.

De esta manera se forman las clases de los *millones*, *billones*, *trillones*, etc.

32. — Así como un millar tiene *diez* centenas, una centena *diez* decenas, y una decena *diez* unidades, se ha convenido en dividir cada unidad en

diez partes iguales, llamadas **décimas**, cada **décima** en **diez centésimas**, cada **centésima** en **diez milésimas**, etc.

33. — Por lo expuesto se ve que una cifra sola, ó bien la *primera* de la derecha de una cantidad entera, representa *unidades*, la *segunda decenas*, la *tercera centenar*, y así sucesivamente : *millares*, *decenas de millar*, *centenas de millar*, *millones*, etc. Si hay decimales, la *primera cifra después de la coma* representa *décimas*, la *segunda centésimas*, y así sucesivamente : *milésimas*, *diezmilésimas*, *cienmilésimas*, *millonésimas*, etc.¹.

34. — Todas las cifras de una cantidad, menos el cero, tienen dos valores : uno *absoluto*, que reciben por su figura, y otro *relativo*, por el lugar que ocupan.

35. — Además, cada una de estas cifras representa un orden de unidades *diez* veces mayor que la que está á la derecha, y *diez* veces menor que la que está á la izquierda.

EJEMPLO. — En el número 758,432, el valor absoluto de la primera cifra entera es 8; su valor relativo, 8 unidades; de la siguiente cifra, su valor absoluto es 5; su valor relativo, 5 decenas; de la primera cifra decimal, su valor absoluto es 4; su valor relativo, 4 décimas; de la siguiente, el valor absoluto es 3; su valor relativo 3 centésimas, etc.

36. — Un número entero se hace *diez veces mayor* por cada cero que se le agrega á la *derecha*.

1. Véase el cuadro del sistema de numeración decimal.

Sistema de numeración decimal.

Progresión creciente.

- 12 Unidades de billón.
 11 Centenas de millar de millón.
 10 Decenas de millar de millón.
 9 Unidades de millar de millón.
 8 Centenas de millón.
 7 Decenas de millón.
 6 Unidades de millón.
 5 Centenas de millar.
 4 Decenas de millar.
 3 Unidades de millar.
 2 Centenas.
 1 Decenas.
 0 Unidades.

Progresión decreciente.

- 4 Décimas.
 2 Centésimas.
 3 Milésimas.
 4 Diezmilésimas.
 5 Cienmilésimas.
 6 Millonésimas.
 7 Diezmillonésimas.
 8 Cienmillonésimas.
 9 Milmillonésimas.
 10 Diezmilmillonésimas.
 11 Cienmilmillonésimas.
 12 Billonésimas.

Sea, por ejemplo, el número 5 unidades : si le agregamos un cero á la derecha se convertirá en 5 decenas, ó 50 unidades.

37. — Un número entero se hace *diez veces menor* por cada cero que se le quita á la *derecha*.

Sea, por ejemplo, el número 70 : si suprimimos el cero, se convertirá en 7, donde se ve que el valor relativo del 7 ha cambiado de 7 decenas á 7 unidades.

38. — Una fracción decimal *no se altera* cuando se le agregan ó quitan ceros á la *derecha*.

Sea, por ejemplo : 0,250 ; si agregamos un cero á la derecha se convertirá en 0,2500 ; pero siempre el 2 expresará décimas y el 5 centésimas como antes de agregar el cero ; si en vez de agregar suprimimos un cero, se convertirá en 0,25, y siempre el 2 expresará décimas, y el 5 centésimas, como antes de suprimir el cero.

39. — Una fracción decimal se hace *diez veces mayor* por cada lugar que se corre la coma á la *derecha*.

Sea la fracción decimal 0,75 : corriendo la coma un lugar á la derecha se convertirá en 7,5, donde se ve que el 7 que expresaba décimas, ahora expresa unidades, y el 5 que expresaba centésimas, ahora expresa décimas.

40. — Una fracción decimal se hace *diez veces menor* por cada lugar que se corre la coma á la *izquierda*.

Sea, por ejemplo, 0,5 : si corremos la coma un lugar hacia la izquierda se convertirá en 0,05, donde se ve que el 5 que expresaba décimas, ahora expresa centésimas.

41. — Una fracción decimal que no contiene enteros, se hace *diez veces menor* por cada cero que se le *agrega á la izquierda*.

Sea, por ejemplo, 0,5 : agregando un cero á la izquierda se convierte en 0,05 donde se ve que el 5 que expresaba décimas ahora expresa centésimas.

42. Una fracción decimal que no contiene enteros se hace *diez veces mayor* por cada cero que se le *quita á la izquierda*.

Sea la fracción 0,05 : suprimiendo un cero de la izquierda se convierte en 0,5, donde se ve que el 5, que expresaba centésimas, ahora expresa décimas.

43. — Para leer una cantidad se divide su parte entera en períodos de tres en tres cifras, comenzando por la derecha, poniendo en el primer período una coma, que se lee *mil*; en el segundo un 1, que se lee *millón*, y así alternativamente, una coma y un 2, que se le *billón*, una coma y un 3, que se lee *trillón*, etc. Se hace lo mismo con las decimales, y se comienza á enunciar por la izquierda, agregando al fin de los enteros la palabra *unidades* ó el nombre de su especie, si la tuviere; en seguida se enuncia la decimal, dándole al fin la denominación que le corresponda á su última cifra, por el lugar que ocupe. Ejemplo :

9,504'894,875,04,834

Se leerá :

Nueve mil, quinientos cuatro millones, ocho

cientas noventa y cuatro mil, ochocientas setenta y cinco unidades; cuatro mil, ochocientas treinta y cuatro cienmilésimas.

44. — Para escribir una cantidad se comienza por la *izquierda*, cuidando que del millón, por ejemplo, al mil, haya *tres* cifras; del mil á las unidades, otras *tres*; se pone una coma *invertida* al fin de los enteros y se colocan *las décimas en el primer lugar* después de la coma, *las centésimas en el segundo*, etc., teniendo cuidado de ocupar con ceros los órdenes de unidades que falten¹.

NÚMEROS ROMANOS

I	V	X	L	C	D	M
Uno.	Cinco.	Diez.	Cincuenta.	Ciento.	Quinientos.	Mil

45. — Varias cifras iguales, escritas unas á continuación de las otras, *se suman*.

Así el número	II representa	2
—	III	3
—	XX	20
—	XXX	30
—	CC	200
—	CCC	300

46. — Toda cifra colocada á la *izquierda* de otra mayor que ella *se resta*.

Así el número	IV representa	4
—	IX	9
—	XL	40
—	XC	90

1. Véanse, en la *Colección de Problemas de Aritmética*, del autor, los problemas del 1 al 100.

47. — Toda cifra colocada á la *derecha* de otra mayor que ella *se suma*.

Así el número	VI	representa	6
—	XI	—	11
—	LX	—	60
—	CX	—	110

48. — Un número marcado con una línea horizontal representa millares; con dos líneas millones, con tres billones.

Así el número	<u>VI</u>	representa	6 mil
—	<u>XI</u>	—	11 millones
—	<u>LX</u>	—	60 billones.

También se representa *mil* por CIJ.

49. — En los prólogos de los libros se emplea frecuentemente, para la paginación, la letra minúscula *i*, y la letra *j* en lugar de una *i* final.

Así el número	i	representa	1
—	ij	—	2
—	iiij	—	3
—	vj	—	6
—	xvij	—	17

50. — CUADRO DE NÚMEROS ESCRITOS CON CIFRAS ROMANAS.

I.	1	VII	7
II.	2	VIII.	8
III.	3	IX	9
IV	4	X.	10
V.	5	XI	11
VI	6	XII	12

XIII.	13	LXX.	70
XIV.	14	LXXX.	80
XV.	15	XC.	90
XVI.	16	XCVII.	97
XVII.	17	XCIX ó IC.	99
XVIII.	18	C.	100
XIX.	19	CIC.	199
XX.	20	CC.	200
XXI.	21	CCC.	300
XXII.	22	CD ó CCCC.	400
XXIII.	23	D ó ID.	500
XXIV.	24	DC ó IDC.	600
XXV.	25	CM.	900
XXVI.	26	M ó CID.	1,000
XXVII.	27	MC.	1,100
XXVIII.	28	MD.	1,500
XXIX.	29	X̄.	10,000
XXX.	30	LXI.	61,000
XXXI.	31	V̄.	5,000,000
XXXIX.	39	D̄.	500,000,000
XL.	40	MDCCLXXXIX.	1,789
XLV.	45	MDCCCLXXV.	1,875
L.	50	MDCCLVI.	1,856
LX.	60	MCCCXCVIII.	1,898

NÚMEROS ORDINALES

1º Primero.	13º Décimotercio ó tercero.
2º Segundo.	14º Décimo cuarto.
3º Tercero.	15º Décimo quinto.
4º Cuarto.	16º Décimo sexto.
5º Quinto.	17º Décimo séptimo.
6º Sexto.	18º Décimo octavo.
7º Séptimo.	19º Décimo noveno.
8º Octavo.	20º Vigésimo.
9º Noveno ó Nono.	21º Vigésimo primero, etc
10º Décimo.	30º Trigésimo.
11º Undécimo.	40º Cuadragésimo.
12º Duodécimo.	50º Quincuagésimo.

60° Sexagésimo.

70° Septuagésimo.

80° Octogésimo.

90° Nonagésimo.

100° Centésimo.

1000° Milésimo.

Cuestionario.

¿Qué es sistema de numeración? 25. — ¿Cuáles son las cifras de que nos valemos para contar? 26. — ¿Cómo se forman las unidades de primer orden? 27. — ¿Qué es una decena? 28. — ¿Cómo se forman los números comprendidos entre 1 y 100? 29. — ¿Qué es una centena? 30. — ¿Qué es un millar? 31. — ¿Qué cosa es una décima, una centésima, etc.? 32. — ¿Cuántos valores se consideran á las cifras? 34. — ¿Cómo se hace un número entero, diez, cien, etc., veces mayor? 36. — ¿Cómo se hace un número entero, diez, cien, etc., veces menor? 37. — ¿Qué alteración sufre una fracción decimal cuando se le agregan ó quitan ceros á la derecha? 38. — ¿Cómo se hace una fracción decimal diez, cien, etc., veces mayor? 39. — ¿Cómo se hace una fracción decimal diez, cien, etc., veces menor? 40. — ¿Qué alteración sufre una fracción decimal que no contiene enteros, cuando se le agregan ceros á la izquierda? 41. — ¿Qué alteración sufre una fracción decimal que no contiene enteros, cuando se le quitan ceros á la izquierda? 42. — ¿Cuál es la regla para leer una cantidad? 43. — ¿Cuál es la regla para escribir una cantidad? 44. — ¿Cuántos y cuáles son los caracteres romanos? — ¿Cómo se leen los números romanos formados por letras iguales? 45. — ¿Cómo se leen los números romanos formados por letras de valores diferentes? 46 y 47.

(Como ejercicio haga contar el Profesor, de un número á otro cualquiera, graduando las dificultades).

Ejercicios y problemas sobre la numeración.

1. — Escribir con cifras : *treinta y seis, ochenta.*

Treinta y seis. — Este número que contiene tres decenas y seis unidades, se escribe con un 3 que representa las decenas y un 6 que se coloca á la derecha del 3 y representa las unidades, así : 36.

Ochenta. — Este número que contiene ocho decenas sin contener unidades, se escribe con un 8 que representa las decenas y un 0 que se coloca á la derecha del ocho para ocupar el lugar de las unidades, así : 80.

Escribir explicando del mismo modo :

2. — Noventa y siete. — Treinta y ocho. — Cuarenta y uno. — Treinta. — Sesenta.

3. — Setenta y cinco. — Ochenta y nueve. — Cincuenta y cuatro. — Veinte. — Cincuenta.

4. — Sesenta y seis. — Veinticuatro. — Diez y siete. — Setenta. — Cuarenta.

5. — Escribir con cifras : *Trescientos veintiocho*. — *Cuatrocientos cincuenta*. — *Setecientos*. — *Seiscientos nueve*.

Trescientos veintiocho. — Este número que contiene tres centenas, dos decenas y ocho unidades, se escribe con un 3 que representa las centenas, un 2 que se coloca á la derecha de las 3 centenas y representa las decenas y un ocho á la derecha de las 2 decenas y representa las unidades, así : 328.

Cuatrocientos cincuenta. — Este número que contiene cuatro centenas, cinco decenas y que no contiene unidades, se escribe con un 4 que representa las centenas, un 5 que se coloca á la derecha del 4 y que representa decenas y un 0 á la derecha del 5 para ocupar el lugar de las unidades, así : 450.

Setecientos. — Este número que contiene siete centenas sin contener decenas ni unidades, se escribe con un 7 que representa las centenas, á la derecha del 7 un cero que ocupará el lugar de las decenas, á la derecha de este cero otro cero para ocupar el lugar de las unidades, así : 700.

Seiscientos nueve. — Este número que contiene seis centenas y nueve unidades sin contener decenas, se escribe con un 6 que representa centenas, á la derecha del 6 un 0 para ocupar el lugar de las decenas, y á la derecha del 0 un 9 que representa unidades, así : 609.

Escribir explicando del mismo modo :

6. — Seiscientos cuarenta y siete. — Quinientos setenta y tres. — Ochocientos. — Ciento siete.

7. Seiscientos ochenta. — Doscientos treinta y cinco. — Setecientos nueve. — Novecientos.

8. — Doscientos noventa y siete. — Ochocientos uno. — Seiscientos. — Trescientos setenta.

9. — Escribir con cifras : Siete mil quinientos ochenta y cuatro. — Tres mil setenta. — Cinco mil nueve. — Cuatro mil. — Treinta mil setecientos cuarenta y seis. — Ochocientos siete mil sesenta. — Cincuenta y nueve millones cuarenta y seis.

Siete mil quinientos ochenta y cuatro. — Este número que contiene siete millares, cinco centenas, ocho decenas y cuatro unidades, se escribe con un 7 que representa millares, á la derecha del 7 un 5 que representa centenas, á la derecha del 5 un 8 que representa decenas y á la derecha del 8 un 4 que representa unidades, así : 7584.

Tres mil selenta. — Este número que contiene tres millares y siete decenas sin contener unidades ni centenas, se escribe con un 3 que representa millares, á la derecha del 3 un 0 que ocupa el lugar de las centenas, á la derecha del 0 un 7 que representa decenas y á la derecha del 7 un 0 que ocupa el lugar de las unidades, así : 3070.

Cinco mil nueve. — Este número que contiene cinco millares y nueve unidades sin contener decenas ni centenas se escribe con un 5 que representa millares, á la derecha del 5 un 0 que ocupa el lugar de las centenas, á la derecha de este 0 otro 0 que ocupa el lugar de las decenas, y á la derecha de este cero un 9 que representa unidades, así : 5009.

Cuatro mil. — Este número que solamente contiene millares, se escribe con un 4 seguido de tres ceros á la derecha para ocupar los lugares de las centenas, decenas y unidades, así : 4000.

Treinta mil setecientos cuarenta y seis. — Este número que contiene tres decenas de millar, siete centenas, cuatro decenas y seis unidades, se escribe con un 3 que representa las decenas de millar, á la derecha del 3 un 0 que ocupa el lugar de las unidades de millar, á la derecha del 0 un 7 que representa las centenas, á la derecha del 7 un 4 que representa decenas y á la derecha del 4 un 6 que representa unidades, así : 30746.

Ochocientos siete mil sesenta. — Este número que contiene ocho centenas de millar, siete millares y seis decenas, sin contener decenas de millar, centenas ni unidades, se escribe con un 8 que representa centenas de millar, á la derecha del 8 un cero que ocupa el lugar de las decenas de millar, á la derecha del 0 un 7 que representa unidades de millar, á la derecha del 7 un 0 que ocupa el lugar de las centenas, en seguida un 6 que representa decenas y por último, un 0 que ocupa el lugar de las unidades, así : 807060.

Cincuenta y nueve millones, cuarenta y seis. — Este número que contiene cinco decenas de millón, nueve unidades de millón, cuatro decenas, y seis unidades, sin contener las otras especies de unidades, se escribe con un 5 que representa decenas de millón, á la derecha del 5 un 9 que representa unidades de millón, á la derecha del 9, cuatro ceros que ocupan respectivamente los lugares de las centenas de millar, decenas de millar, unidades de millar, y centenas que faltan, á la derecha del último cero, un 4 que representa decenas, á la derecha del 4 un 6 que representa unidades, así : 59000046.

Escribir explicando del mismo modo :

10. — Doscientos siete mil ochocientos cuarenta y tres. — Cuatro millones, nueve mil, seiscientos veintiocho. — Ochocientos millones, quinientos seis.

11. — Tres millones, noventa y cuatro mil cinco unidades. — Setenta y cinco mil millones, diez mil dieciséis unidades. — Seiscientos cuarenta y ocho mil setenta.

12. Leer los números :

87. — 30. — 904. — 400. — 3000. — 5008. — 4060. — 3700. — 947604. — 2947586. — 4006101008. — 90000040. — 37580090635 84375638009408.

13. — Escribir con cifras : *Cuatro unidades, treinta y siete centésimas*. — Se escribe primero la parte entera 4, luego se pone una coma invertida á la derecha del 4, en seguida un 3 que representa décimas y un 7 que representa centésimas, así : 4,37.

14. — Escribir : *Setenta y cinco milésimas*. — Este número que contiene siete décimas y cinco milésimas sin contener unidades ni décimas se escribe con un 0 que ocupa el lugar de las unidades, á la derecha una coma invertida, á la derecha un 0 que ocupa el lugar de las décimas, á la derecha un 7 que representa centésimas y un 5 que representa unidades, así : 0,075.

Escribir explicando del mismo modo :

15. — Veinticinco unidades, quinientas ocho diezmilésimas. — Seiscientos siete diezmillonésimas. — Cuatrocientas setenta ciemilésimas.

16. — Tres mil, cuatrocientas ochenta y seis cienmillonésimas. — Sesenta y cinco unidades, cuatrocientas cincuenta y ocho milésimas.

17. — Novecientas cuarenta y siete centésimas. — Dos mil nueve décimas. — Cuarenta y ocho mil setecientas treinta y cuatro milésimas.

18. — Leer los números :

43. — 8,005. — 35,4008406. — 0,00081. — 0,000010001. — 31,4159265358979. — 0,838. — 1,424006. — 1,193317. — 0,702244. — 2,191716. — 46,024634.

19. — *Hacer el número 28 diez veces mayor*. — Basta agregar un cero á la derecha puesto que el 8 que representaba unidades ahora representa decenas y el 2 que representaba decenas ahora representa centenas : 280.

20. — Del mismo modo hacer el número 49 diez, cien, mil, diezmil veces mayor.

21. Hacer el número 235 diez, cien, mil, diez mil veces mayor.

22. — Hacer el número 40630 diez, cien, mil, diez mil veces mayor.

23. — *Hacer el número 2500 diez veces menor*. — Basta suprimir un cero á la derecha del número, puesto que el cinco que representaba centenas ahora representa decenas, y el 2 que representaba millares ahora representa centenas : 250

24. — Del mismo modo : Hacer el número 240000 diez, cien, mil, diez mil veces menor.

25. — Hacer mil veces menor los números : 4500000. — 3010000. — 64000000.

26. *Hacer el número 4,25 cien veces mayor.* — Basta correr la coma dos lugares á la derecha, puesto que el 4 que representaba unidades ahora representa centenas, el 2 que representaba décimas ahora representa decenas y el 5 que representaba centésimas ahora representa unidades : 425.

27. Del mismo modo : Hacer el número 3,141593 diez, cien, mil, diez mil veces mayor.

28. — *Hacer el número 45,76 cien veces menor.* — Basta correr la coma dos lugares á la izquierda, puesto que el 4 que representaba decenas ahora representa décimas, el 5 que representaba unidades ahora representa centésimas, el 7 que representaba décimas ahora representa milésimas y el 6 que representaba centésimas ahora representa diezmilésimas : 4576.

29. — Del mismo modo : Hacer diez veces menor los números : 4,75. — 36,048. — 475,36. — 24763,008.

30. *Hacer el número 475 cien veces menor.* — Basta separar con una coma dos cifras contando de derecha á izquierda, puesto que el 4 que representaba centenas ahora representa unidades, el 7 que representaba decenas ahora representa décimas y el 5 que representaba unidades ahora representa centésimas : 4,75.

31. Del mismo modo : Hacer mil veces menor los números : 4378. — 356. — 28. — 60425.

32. — Hacer cien veces menor los números : 0,47. — 48,375. — 0,04.

SISTEMA MÉTRICO

PRIMERA PARTE. — NOCIONES GENERALES DEFINICIONES.

51. — *Sistema legal métrico decimal* es el conjunto de las unidades de pesas y medidas cuya base es el metro¹.

52. **LONGITUDES.** — *El METRO es la medida ó la unidad de medida de las longitudes.*

Así el metro sirve para medir la longitud de una pieza de género, la distancia de un punto á otro, el contorno de un árbol, la profundidad de un pozo, etc., y en general todas las líneas rectas ó curvas².

53. **SUPERFICIES.** — La unidad de *superficie* es el METRO CUADRADO.

1. Del griego *metrón*, que significa medida.

2. El Profesor mostrará á los alumnos un metro *recto* ó de *doblar*, les explicará el tamaño de un *decímetro*, de un *centímetro* y de un *milímetro*, y les hará medir las dimensiones de la clase, del pizarrón, de la mesa, etc.

Como la enseñanza del sistema métrico es la prescrita exclusivamente por la ley, se abstendrá el Profesor de hablar á sus alumnos de *vara*, *libra*, *cuartillo*, etc.

54. — **Metro cuadrado** es un cuadrado de un metro de longitud por cada lado¹.

Así el metro cuadrado sirve para medir la superficie de una sala, de un patio, de un círculo, etc.

55. **VOLÚMENES.** — La unidad de volumen es el METRO CÚBICO.

56. — **Metro cúbico** es un cubo de un metro de longitud por cada lado².

Así el metro cúbico sirve para medir el volumen de un trozo de mármol, de una pared, etc.

57. **CAPACIDADES.** — La unidad de capacidad es el LITRO.

58. — **Litro** es un cubo hueco cuyo lado interior mide un decímetro³.

1 Para dar el alumno una idea exacta del metro cuadrado, el Profesor trazará en el pizarrón un cuadrado de un metro por lado y le hará ver cómo se divide en 100 decímetros cuadrados, y el decímetro cuadrado en 100 centímetros cuadrados, etc.

El Profesor hará que el alumno determine la superficie del piso de la clase, la del pizarrón, la mesa, etc.

2 En un rincón de la clase, y con ayuda de tres reglas de un metro de largo, el Profesor dará á sus alumnos una idea exacta del metro cúbico.

Con un cubo de cartón de un decímetro por lado, les dará una idea exacta del *decímetro cúbico* y les hará ver que un metro cúbico tiene 1,000 decímetros cúbicos, que un decímetro cúbico tiene 1,000 centímetros cúbicos, etc.

Hará también que el alumno determine el volumen del aire contenido en la sala, etc.

3. El Profesor mostrará á los alumnos un litro para áridos y uno para líquidos, y por medio de un cubo hueco de hoja de lata, de un decímetro interior por cada lado, les hará ver que la capacidad del litro es la misma que la de un decímetro cúbico.

Hará también que midan la cantidad de agua contenida en un frasco ó en un depósito cualquiera, y les hará ver que 1 litro tiene 10 decilitros, que 1 decilitro tiene 10 centilitros, etc.

Así el litro sirve para medir la cantidad de trigo que contiene una caja, la cantidad de agua que contiene una fuente, etc.

59. **PESOS.** — La unidad de peso es el GRAMO.

60. — **Gramo** es el peso del agua pura contenida en un cubo de un centímetro por lado¹.

El gramo sirve para valuar el peso de una moneda, de un trozo de madera, etc.

61. **MONEDAS.** — La unidad de moneda es EL PESO MEXICANO DE PLATA.

62. — **Peso mexicano** es una moneda de plata que pesa 27 gramos 73 miligramos y mide 39 milímetros de diámetro.

El peso sirve para estimar el valor de los objetos.

63. **Múltiplos.** — Los múltiplos de estas unidades se forman anteponiendo al nombre de la unidad principal las raíces griegas :

<i>Deca</i> ,	que significa	<i>diez</i> .
<i>Hecto</i> ,	—	<i>ciento</i> .
<i>Kilo</i> ,	—	<i>mil</i> .
<i>Miria</i> ,	—	<i>diez mil</i> .

Así *Decámetro* significa *diez metros*.

Hectolitro — *cien litros*.

Kilogramo — *mil gramos*.

Miriámetro — *diez mil metros*.

1. El Profesor mostrará á los alumnos un *centímetro cúbico hueco*, de hoja de lata, y les explicará que el peso de la cantidad de agua pura contenida en ese cubo representa el gramo.

Hará que los alumnos pesen algunos objetos, explicándoles lo que es un decagramo, un hectogramo, etc.

64. Submúltiplos. — Los submúltiplos de estas unidades se forman anteponiendo al nombre de la unidad principal las palabras latinas.

Deci, que significa *décima parte*.
Centi, — *centésima parte*.
Mili, — *milésima parte*.

Así *Decimetro* significa *décima parte del metro*.
Centilitro — *centésima parte del litro*.
Miligramo — *milésima parte del gramo*.

65. Lectura y escritura. — Puesto que las unidades del sistema métrico están sometidas á los principios de la numeración decimal, se leen y escriben como las cantidades decimales.

Así para leer $14^m,75$ se dirá : catorce metros setenta y cinco centímetros.

66. — Abreviaturas.

<i>Miriámetro</i> , se escribe abreviadamente	<i>Mm</i>
<i>Kilómetro</i>	<i>Km</i>
<i>Hectómetro</i>	<i>Hm</i>
<i>Decámetro</i>	<i>Dm</i>
<i>Metro</i>	<i>m</i>
<i>Decimetro</i>	<i>dm</i>
<i>Centimetro</i>	<i>cm</i>
<i>Milimetro</i>	<i>mm</i>

<i>Miriámetro cuadrado</i> , se escribe abreviadamente.	<i>Mm²</i>
<i>Kilómetro cuadrado</i>	<i>Km²</i>
<i>Hectómetro cuadrado</i>	<i>Hm²</i>
<i>Decámetro cuadrado</i>	<i>Dm²</i>
<i>Metro cuadrado</i>	<i>m²</i>
<i>Decimetro cuadrado</i>	<i>dm²</i>
<i>Centimetro cuadrado</i>	<i>cm²</i>
<i>Milimetro cuadrado</i>	<i>mm²</i>

Miriárea	Ma
Hectárea	Ha
Área.	a
Centiárea	ca
Metro cúbico, se escribe abreviadamente. . .	m ³
Decimetro cúbico	dm ³
Centimetro cúbico.	cm ³
Milimetro cúbico.	mm ³
Decasterio	De
Esterio.	e
Decisterio.	de
Mirialitro, se escribe abreviadamente. . . .	Ml
Kilolitro	Kl
Hectolitro.	Hl
Decalitro.	Dl
Litro.	l
Decilitro	dl
Centilitro.	cl
Mililitro	ml
Miriagramo, se escribe abreviadamente. . .	Mg
Kilogramo	Kg
Hectogramo.	Hg
Decagramo	Dg
Gramo	g
Decigramo	dg
Centigramo	cg
Miligramo.	mg

Cuestionario.

¿Qué es Sistema legal métrico decimal? 51. — ¿Cuál es la unidad de longitud? 52. — ¿Para que sirve el metro? 52. — ¿Cuál es la unidad de superficie? 53. — ¿Qué es metro cuadrado? 54. — ¿Para qué sirve el metro cuadrado? 54. — ¿Cuál es la unidad de volumen? 55. — ¿Qué es metro cúbico? 56. — ¿Para qué sirve el metro cúbico? 56. — ¿Cuál es la unidad de capacidad? 57. — ¿Qué es litro? 58. — ¿Para qué sirve el litro? 58.

— ¿Cuál es la unidad de peso? 59. — ¿Qué es gramo? 60. —
¿Para qué sirve el gramo? 60. — ¿Cuál es la unidad de moneda?
61. — ¿Qué es peso mexicano? 62. — ¿Para qué sirve el peso
mexicano? 62. — ¿Cómo se forman los múltiplos de las unidades
métricas? 63. — ¿Cómo se forman los submúltiplos de las uni-
dades métricas? 64. — ¿Cómo se leen las cantidades métricas?
65. — ¿Cómo se abrevian las cantidades métricas? 66.

OPERACIONES PRINCIPALES

DEL CÁLCULO.

67. — **Cálculo**¹ es el conjunto de operaciones que pueden hacerse para resolver una cuestión matemática.

68. — El cálculo sirve para *expresar, componer* y *descomponer* las cantidades.

69. — Las principales operaciones del cálculo son la *adición, sustracción, multiplicación y división*.

70. — En toda operación hay que considerar seis circunstancias principales :

1ª *Definición*, ó qué es la operación.

2ª *Casos*, ó maneras como se presenta.

3ª *Usos*, ó cuándo se aplica.

4ª *Regla general*, ó cómo se resuelve,

5ª *Ejemplo*, ó cómo se aplica.

6ª *Prueba*, ó cómo se rectifica.

1. De la palabra latina *calculus*, china, piedrecita; porque cuando no existían caracteres gráficos, los hombres se servían de chinas para expresar el resultado de las operaciones con las cantidades.

ADICIÓN¹.

71. Definición. — *Sumar* es reunir varias cantidades *homogéneas*, llamadas **sumandos**², en una sola llamada **suma**³.

72. — Esta operación se indica con el signo $+$ (*más*), y el resultado de ésta y de todas las demás operaciones con el signo $=$ (*igual á*); ejemplo : $7 + 5 = 12$ (siete más cinco, igual á doce).

73. Casos. — Los casos de la suma son tres :

1° Sumar *un dígito con otro dígito*; v. gr. : sumar 5 con 7.

2° Sumar *un compuesto con un dígito*; v. gr. : sumar 24 con 6.

3° Sumar *un compuesto con otro compuesto*; v. gr. : sumar 24 con 12.

74 Usos. — La suma se emplea : cuando se quieren reunir varias cantidades *homogéneas* en una sola, cuando se quiere aumentar una cantidad con el valor de otra ú otras, etc.

75. — El primer caso se resuelve á la memoria sabiendo la siguiente

1. Del verbo latino *addo*, añadir.

2. Participio en *dus*, del verbo *summo*, esto es, lo que ha de ser sumado.

3. De la palabra latina *summa*, el conjunto, el total, el todo.

TABLA DE SUMAR.

1 y 1 son 2	2 y 1 son 3	3 y 1 son 4	4 y 1 son 5
1 2 — 3	2 2 — 4	3 2 — 5	4 2 — 6
1 3 — 4	2 3 — 5	3 3 — 6	4 3 — 7
1 4 — 5	2 4 — 6	3 4 — 7	4 4 — 8
1 5 — 6	2 5 — 7	3 5 — 8	4 5 — 9
1 6 — 7	2 6 — 8	3 6 — 9	4 6 — 10
1 7 — 8	2 7 — 9	3 7 — 10	4 7 — 11
1 8 — 9	2 8 — 10	3 8 — 11	4 8 — 12
1 9 — 10	2 9 — 11	3 9 — 12	4 9 — 13
5 y 1 son 6	6 y 1 son 7	7 y 1 son 8	8 y 1 son 9
5 2 — 7	6 2 — 8	7 2 — 9	8 2 — 10
5 3 — 8	6 3 — 9	7 3 — 10	8 3 — 11
5 4 — 9	6 4 — 10	7 4 — 11	8 4 — 12
5 5 — 10	6 5 — 11	7 5 — 12	8 5 — 13
5 6 — 11	6 6 — 12	7 6 — 13	8 6 — 14
5 7 — 12	6 7 — 13	7 7 — 14	8 7 — 15
5 8 — 13	6 8 — 14	7 8 — 15	8 8 — 16
5 9 — 14	6 9 — 15	7 9 — 16	8 9 — 17
9 y 1 son 10	10 y 1 son 11	11 y 1 son 12	12 y 1 son 13
9 2 — 11	10 2 — 12	11 2 — 13	12 2 — 14
9 3 — 12	10 3 — 13	11 3 — 14	12 3 — 15
9 4 — 13	10 4 — 14	11 4 — 15	12 4 — 16
9 5 — 14	10 5 — 15	11 5 — 16	12 5 — 17
9 6 — 15	10 6 — 16	11 6 — 17	12 6 — 18
9 7 — 16	10 7 — 17	11 7 — 18	12 7 — 19
9 8 — 17	10 8 — 18	11 8 — 19	12 8 — 20
9 9 — 18	10 9 — 19	11 9 — 20	12 9 — 21

76. — El **segundo caso** se resuelve sumando, como en el primero, la cifra de orden inferior del compuesto con el número dígito; si la suma no

pasa de nueve, se escribe debajo; en caso contrario, se deja la de orden inferior, y se agrega una unidad á la siguiente cifra del compuesto.

77. — El **tercer caso** se resuelve por medio de la siguiente.

Regla general. — Para sumar se colocan los sumandos, unos debajo de otros, de modo que se correspondan unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas, etc.; décimas con décimas, centésimas con centésimas, etc.; se tira una línea horizontal por debajo y se comienza la operación por la columna de la derecha. Si la suma no llega á diez se escribe debajo; en caso contrario, se escribe la cifra de orden inferior y se lleva la de orden superior á sumar con la siguiente columna, procediendo del mismo modo en esta columna y en las siguientes, hasta llegar á la última, debajo de la cual se escribe el resultado completo.

EJEMPLO¹:

$$\begin{array}{r}
 3728,054 \\
 475,75 \\
 329,0498 \\
 85648,759 \\
 \hline
 90181,6128
 \end{array}$$

78. **Prueba.** — La *prueba de la suma* se hace

1. Véase el primer tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor.

repitiendo la operación en sentido inverso, debiendo ser este resultado igual al primero, si la operación estuvo bien hecha.

79. *Observaciones.* — 1ª Si á uno de los sumandos se le *agrega* una cantidad, la suma resulta *aumentada* la misma cantidad.

Sea, por ejemplo : $7 + 5 = 12$.

Si al sumando 7 le *agregamos* 3 unidades, resultará $10 + 5 = 15$; donde se ve que la suma 12 ha *aumentado* 3 unidades.

2ª Si á una de los sumandos se le *quita* una cantidad, la suma resulta *disminuída* la misma cantidad.

Sea, por ejemplo : $7 + 5 = 12$.

Si al sumando 7 le *quitamos* 3 unidades resultará $4 + 5 = 9$; donde se ve que la suma 12 ha *disminuído* 3 unidades.

3ª El valor de la suma *no se altera* cuando se *invierte* el orden de los sumandos.

Sea, por ejemplo : $7 + 5 = 12$.

Invirtiendo el orden de los sumandos tendremos $5 + 7 = 12$.

4ª El valor de la suma *no se altera* cuando uno de los sumandos *aumenta* y el otro *disminuye* el mismo número de unidades.

Sea, por ejemplo : $7 + 5 = 12$.

Si agregamos 3 unidades al 7 y se las quitamos al 5, resultará $10 + 2 = 12$; donde se ve que la suma resulta la misma.

Cuestionario 1.

¿Qué es cálculo? 67. — ¿Para qué sirve el cálculo? 68. — ¿Cuales son las principales operaciones del cálculo? 69. — ¿Qué hay que considerar en toda operación? 70. — ¿Qué es sumar? 71. — ¿Cómo se indica la operación de sumar? 72. — ¿Cuáles son los casos de la suma? 73. — ¿Cuáles son los usos de la suma? 74. — ¿Cómo se resuelve el primer caso de la suma? 75. — ¿Cómo se resuelve el segundo caso de la suma? 76. — ¿Cómo se resuelve el tercer caso de la suma? 77. — ¿Cómo se resuelve la prueba de la suma? 78. — ¿Qué alteración sufre la suma : 1° Si á uno de los sumandos se le agrega una cantidad; 2° Si á uno de los sumandos se le quita una cantidad; 3° Si á uno de los sumandos se le agrega y á otro se le quita la misma cantidad; 4° Si se invierte el orden de los sumandos? 79.

Ejercicios y problemas sobre la adición.

33. — Agregar una unidad á cada uno de los nueve números dígitos.

34. — Agregar 2 unidades á cada uno de los números dígitos.

35. — Agregar 3, luego 4 y luego 5 unidades á cada uno de los números dígitos.

36. — Agregar 6, luego 7 y luego 8 unidades á cada uno de los números dígitos.

37. — Agregar 9 unidades á cada uno de los números dígitos.

Hacer las siguientes sumas :

38. — $275 + 358 + 619 + 204 + 375$.

39. — $976 + 39 + 870 + 17 + 8 + 265$.

40. — $20436 + 85 + 391 + 9 + 2364 + 28$.

41. — $\$4,25 + \$2,15 + \$0,75 + \$0,87 + 5,00$.

42. — $12^m,15 + 9^m,06 + 8^m,2 + 25^m,14 + 35^m,00 + 16^m,13$.

43. — $6^s,2 + 14^s,17 + 8^s,249 + 0^s,8 + 0^s,4263 + 18^s,1$.

44. — Antonio tiene tres sacos de nueces : el primer saco contiene 248 nueces, el segundo 354 y el tercero 183 ¿ Cuántas nueces tienen los tres sacos?

1. No se permita al alumno que al sumar diga, por ejemplo : 4 y 5, 9; 9 y 3, 12; 12 y 4, 16, etc.; exijasele que diga 4, 9, 12, 16, etc. : esto lo conseguirá ejercitándose en los problemas del 101 al 108 de la *Colección de Problemas* del autor.

Los tres sacos contienen el número de nueces del primer saco reunido con el número de nueces del segundo y con el número de nueces del tercero. Se trata, pues, de reunir estos tres números en uno solo, esto es, de sumarlos.

Aplicando la regla general dispondremos la operación así :

$$\begin{array}{r} 248 \\ 364 \\ 183 \\ \hline 795 \end{array}$$

y diremos, comenzando por la columna de las unidades : 8, 12, 15; escribimos 5 unidades y llevamos una decena á sumar á la columna de las decenas diciendo : 1, 5, 11, 19; escribimos 9 decenas y llevamos una centena á sumar á la columna de las centenas diciendo : 1, 3, 6, 7 y escribimos el 7 con lo que resulta el número 795 que será el total de nueces contenidas en los tres sacos.

Explicar del mismo modo :

45. — Se compró una casa en \$ 12358, se gastó en reponerla \$ 975 ¿ Cuánto vale actualmente?

46. — ¿Cuál es la superficie total de un terreno que está dividido en cuatro lotes, el 1° de 927 áreas de superficie; el 2° de 436, el 3° de 575 y el 4° de 249?

47. — Un banquero hace los siguientes pagos : \$ 1358,75, \$ 20456,37, \$ 12874,28, \$ 9433,87, \$ 246,24 y 958,24; Qué cantidad ha pagado?

SUBSTRACCIÓN ¹

80. Definición. — *Restar* es hallar la diferencia entre dos cantidades homogéneas.

81. — La cantidad de quien se resta se llama **minuendo**², porque tiene que *disminuir*; la que se resta **substraendo**³, porque se ha de *substraer* de la anterior, y el resultado, **diferencia**, **exceso** ó **resta**.

Puede decirse igualmente que *restar es hallar una cantidad que sumada con el substraendo dé por suma el minuendo*.

82. — El *signo de substracción* es — (menos), y puesto entre dos cantidades indica que la segunda se ha de restar de la primera.

83. Casos. — Los casos de la substracción son tres :

1º Cuando el minuendo y el substraendo son números *dígitos*.

1. De la palabra latina *subtrahō*, quitar por debajo.

2. De la palabra latina *minuendus*, el que ha de ser disminuido.

3. De la palabra latina *subtrahendus*, el que ha de ser quitado.

2° Cuando uno de ellos es *dígito* y el otro *compuesto*.

3° Cuando ambos son *compuestos*.

84. **Usos.** — *Se usa la resta* : cuando se quiere hallar la diferencia entre dos cantidades homogéneas, cuando se busca un número que sumado con otro forme un número propuesto, cuando se quiere disminuir una cantidad con el valor de otra, etc.

85. — El **primero** y **segundo caso** se resuelven buscando un número que *sumado con el substraendo* dé el minuendo.

86. — El **tercer caso** se resuelve por medio de la siguiente.

Regla general. — *Para restar* se coloca la cantidad menor debajo de la mayor, de modo que se correspondan unidades con unidades, decenas con decenas, etc., décimas con décimas, centésimas con centésimas, etc.; se tira una línea horizontal por debajo y se ve cuánto le falta á cada cifra del substraendo para ser igual á la correspondiente del minuendo, cuyo número se escribe debajo, llevando la cifra de orden superior que resulte á sumar con la cifra siguiente del substraendo, y así se continúa la operación.

EJEMPLO¹:

$$\begin{array}{r}
 \$ 4758,079 \\
 2170,942 \\
 \hline
 \$ 2587,137
 \end{array}$$

1. Véase el primer tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor.

87. **Prueba.** — Para hacer la *prueba* se suma el substraendo con la diferencia, debiendo resultar el minuendo si la operación estuvo bien ejecutada.

88. **Observaciones.** — 1ª Si al *minuendo* se le *agrega* una cantidad, la resta resulta *aumentada la misma cantidad*.

Sea, por ejemplo : $12 - 4 = 8$.

Si al minuendo le *agregamos* 3 unidades, resultará : $15 - 4 = 11$, diferencia 3 unidades *mayor* que 8.

2ª Si al *minuendo* se le *quita* una cantidad, la resta resulta *disminuída la misma cantidad*.

Sea, por ejemplo : $12 - 4 = 8$.

Si al minuendo le *quitamos* 3 unidades, resultará $9 - 4 = 5$, diferencia 3 unidades *menor* que 8.

3ª Si al *substraendo* se le *agrega* una cantidad, la resta resulta *disminuída la misma cantidad*.

Sea, por ejemplo : $12 - 4 = 8$.

Si al substraendo le *agregamos* 3 unidades, resultará $12 - 7 = 5$, diferencia 3 unidades *mayor* que 8.

4ª Si al *substraendo* se le *quita* una cantidad, la resta resulta *aumentada la misma cantidad*.

Sea, por ejemplo : $12 - 4 = 8$.

Si al substraendo le *quitamos* 3 unidades, resultará $12 - 1 = 11$, diferencia 3 unidades *mayor* que 8.

5ª *No se altera la resta* cuando al *minuendo* y al *substraendo* se les *agrega* ó *quita* la misma cantidad.

Sea, por ejemplo : $12 - 4 = 8$.

Si al *minuendo* y al *substraendo* les *agregamos* 3 unidades, resultará $15 - 7 = 8$, diferencia *igual* á la anterior.

Si al *minuendo* y al *substraendo* les *quitamos* 3 unidades, resultará $9 - 1 = 8$, diferencia *igual* á la anterior.

6ª Cuando el substraendo sea *mayor* que el minuendo, réstese siempre la cantidad menor de la mayor, anteponiendo al resultado el signo $-$; ejemplo : $3 - 8 = -5$ y se dice que el resultado es *negativo*.

Cuestionario.

¿Qué es restar? 80. — ¿Qué se entiende por minuendo, substraendo y diferencia? 81. — ¿Cuál es el signo de la substracción? 82. — ¿Cuáles son los casos de la substracción? 83. — ¿Cuáles son los usos de la resta? 84. — ¿Cómo se resuelven el primero y segundo casos de la resta? 85. — ¿Cómo se resuelve el tercer caso de la resta? 86. — ¿Cómo se prueba la operación de restar? 87. — ¿Qué alteraciones sufre la resta cuando al minuendo, al substraendo ó á ambos se les agrega ó quita una misma cantidad? 88. — ¿Qué resultado se obtiene cuando el substraendo es mayor que el minuendo? 88.

Ejercicios y problemas sobre la substracción.

48. — Quitar una unidad á cada uno de los números dígitos.
49. — Quitar 2 unidades á cada uno de los números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
50. — Restar 3 de cada uno de los números, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.
51. — Restar 4 de los números 4, 5, 6, 7, 8 y 9.
52. — Restar 5 de cada uno de los números 5, 6, 7, 8 y 9.
53. — Restar 6 de cada uno de los números 6, 7, 8 y 9.
54. — ¿Cuánto le falta á 7 para ser igual á los números 7, 8 y 9?
55. — ¿Qué diferencia hay entre 8 y los números 8 y 9?
56. — ¿Cuánto le falta al 7 para igualar á los números 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16?
57. — Restar 9 de los números 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16?

57. — Restar 9 de los números 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 y 18.

58. — Restar 10 de cada uno de los números 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 y 19.

59. — De 375 restar 223.

— 956 — 134.

— 265 — 133.

60. — De 3623 restar 2419.

— 9070 — 1945.

— 4617 — 3948.

61. — Una persona tenía \$ 24043 y gastó \$ 12897; Cuánto le queda? — Le queda la diferencia entre 24043 y 12897. Aplicando la regla general dispondremos la operación así :

$$\begin{array}{r} 24043 \\ 12897 \\ \hline 11146 \end{array}$$

y diremos, comenzando por la derecha; 7 para 13, 6 y va 1, y 9, 10, para 14, 4 y va 1, y 8, 9, para 10, 1, y va 1, y 2, 3, para 4, 1 y no va nada; 1, para 2, 1. Luego la diferencia buscada es \$ 11146.

Explicar del mismo modo :

62. — Un frasco vacío pesa 978 gramos, con agua pesa 1018 gramos; ¿Cuál es el peso del agua?

63. — Enrique IV subió al trono en 1589 y murió en 1610; ¿Qué tiempo reinó?

64. — La América fué descubierta en 1492; Cuántos años han pasado hasta hoy (1903)?

65. — Tenía yo guardados \$ 230 y gasté \$ 128,75; Cuánto me queda?

MULTIPLICACIÓN¹

89. **Definición.** — *Multiplicar* es tomar una cantidad llamada **multiplicando**², tantas veces como unidades tiene otra llamada **multiplicador**³.

Se dice también que *multiplicar es hallar una cantidad que tenga con el multiplicando la misma relación que el multiplicador tiene con la unidad*. Así, cuando vamos á multiplicar 7 por 8, vamos á encontrar una cantidad que tenga con 7 la misma relación que 8 con 1; es decir, que así como 8 es ocho veces mayor que 1, vamos á encontrar una cantidad ocho veces mayor que 7.

90. — Las dos cantidades juntas se llaman **factores**⁴ y el resultado de la operación **producto**⁵.

91. — La multiplicación se indica con el signo $\times$ (*multiplicado por*), ó por medio de un punto que se coloca entre las cantidades que se

1. De la palabra latina *multiplico*, compuesta de *multus*, mucho y *plico*, plegar.

2. De *multiplicandus*, el que ha de ser multiplicado.

3. De *multiplicator*, el que multiplica.

4. Del latin *facio*, hacer.

5. Del latin *produco*, producir.

deban multiplicar; ejemplo, 7×8 ó bien 7.8 se leerá : 7 multiplicado por 8.

92. — Cuando se tenga que multiplicar la suma ó diferencia de varias cantidades por la suma ó diferencia de otras, se indica la operación encerrándolas dentro de un paréntesis; ej. : $(7 + 8 - 3)$ $(13 - 7 + 12)$ se leerá : $7 + 8 - 3$ que multiplica á $13 - 7 + 12$; y $(3 - 7 + 6)$ 7 se leerá : $3 - 7 + 6$ que multiplica á 7.

93. **Casos.** — *Los casos de la multiplicación son tres* : multiplicar un número dígito por otro, un compuesto por un dígito y un compuesto por otro compuesto.

94. **Usos.** — *Los usos de la multiplicación son dos* : 1° Conocido el valor de una unidad averiguar el de varias. 2° Reducir unidades de especie mayor á menor.

95. — El primer caso se resuelve á la memoria, sabiendo la

TABLA DE MULTIPLICAR

2 por 1 son 2	3 por 1 son 3	4 por 1 son 4
2 — 2 — 4	3 — 2 — 6	4 — 2 — 8
2 — 3 — 6	3 — 3 — 9	4 — 3 — 12
2 — 4 — 8	3 — 4 — 12	4 — 4 — 16
2 — 5 — 10	3 — 5 — 15	4 — 5 — 20
2 — 6 — 12	3 — 6 — 18	4 — 6 — 24
2 — 7 — 14	3 — 7 — 21	4 — 7 — 28
2 — 8 — 16	3 — 8 — 24	4 — 8 — 32
2 — 9 — 18	3 — 9 — 27	4 — 9 — 36
2 — 10 — 20	3 — 10 — 30	4 — 10 — 40
5 por 1 son 5	6 por 1 son 6	7 por 1 son 7
5 — 2 — 10	6 — 2 — 12	7 — 2 — 14
5 — 3 — 15	6 — 3 — 18	7 — 3 — 21
5 — 4 — 20	6 — 4 — 24	7 — 4 — 28
5 — 5 — 25	6 — 5 — 30	7 — 5 — 35
5 — 6 — 30	6 — 6 — 36	7 — 6 — 42
5 — 7 — 35	6 — 7 — 42	7 — 7 — 49
5 — 8 — 40	6 — 8 — 48	7 — 8 — 56
5 — 9 — 45	6 — 9 — 54	7 — 9 — 63
5 — 10 — 50	6 — 10 — 60	7 — 10 — 70
8 por 1 son 8	9 por 1 son 9	10 por 1 son 10
8 — 2 — 16	9 — 2 — 18	10 — 2 — 20
8 — 3 — 24	9 — 3 — 27	10 — 3 — 30
8 — 4 — 32	9 — 4 — 36	10 — 4 — 40
8 — 5 — 40	9 — 5 — 45	10 — 5 — 50
8 — 6 — 48	9 — 6 — 54	10 — 6 — 60
8 — 7 — 56	9 — 7 — 63	10 — 7 — 70
8 — 8 — 64	9 — 8 — 72	10 — 8 — 80
8 — 9 — 72	9 — 9 — 81	10 — 9 — 90
8 — 10 — 80	9 — 10 — 90	10 — 10 — 100

96. — El segundo y el tercero se resuelven por medio de la siguiente.

Regla general. — *Para hacer la multiplicación se coloca el multiplicador debajo del multiplicando, y se comienza á multiplicar cada cifra del multiplicador por todo el multiplicando, teniendo cuidado de colocar la primera cifra de cada producto parcial en el lugar correspondiente, es decir, el de la 2ª en el segundo lugar; el de la 3ª en el tercero, etc.; luego se suman estos productos parciales, y la suma de todos es el producto total, en el cual se separan, de derecha á izquierda, con una coma decimal, tantas cifras como decimales haya en ambos factores juntos. Si hay menos cifras en el producto que decimales en los factores, se completan con ceros á la izquierda, poniendo luego la coma.*

EJEMPLO¹:

$$\begin{array}{r}
 428,758 \\
 \times 4,75 \\
 \hline
 \left\{ \begin{array}{l} 5 = 2143790 \\ 7 = 3001306 \\ 4 = 1715032 \end{array} \right. \\
 \hline
 2036,60050
 \end{array}$$

97. **Prueba.** — *Para hacer la prueba se suman separadamente las cifras del multiplicando, multi-*

1. Véase el primer tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor.

plicador, y producto y las cifras de estas sumas, hasta obtener un número de una sola cifra; se multiplican las cifras obtenidas en los factores, se suman las cifras de este producto, hasta obtener un número de una cifra; el cual debe ser igual á la cifra obtenida del producto total. EJEMPLO :

Ejecutar la prueba de la multiplicación del párrafo anterior :

Suma de las cifras del multiplicando :

$$4 + 2 + 8 + 7 + 5 + 8 = 34$$

Suma de las cifras de esta suma :

$$3 + 4 = 7$$

Ejecutando lo mismo con las cifras del multiplicador .

$$4 + 7 + 5 = 16$$

Sumando las cifras de esta suma :

$$1 + 6 = 7$$

Ejecutando lo mismo con las cifras del producto :

$$2 + 3 + 6 + 6 + 5 = 22$$

Sumando las cifras de esta suma :

$$2 + 2 = 4$$

Multiplicando la cifra 7 obtenida del multiplicando por la cifra 7 obtenida del multiplicador :

$$7 \times 7 = 49$$

Sumando las cifras de este producto y las de su suma :

$$4 + 9 = 13$$

$$1 + 3 = 4$$

resulta la cifra 4 igual á la obtenida del producto total¹.

98. — *La operación de multiplicar puede abreviarse en los siguientes casos :*

I. — *Cuando alguno de los factores es la unidad seguida de ceros, si el otro factor no contiene decimales, basta agregarle dichos ceros á la derecha; si las contiene, basta correr la coma, hacia la derecha, tantos lugares como ceros acompañen á la unidad. Ejemplo :*

$$\$ 467 \times 100 = 46700 \quad \$ 7,49 \times 1000 = \$ 7490.$$

II. — *Cuando alguno ó ambos factores terminan en ceros, se hace abstracción de dichos ceros, teniendo cuidado de agregarlos á la derecha del producto total. Ejemplo :*

$$\begin{array}{r} 7500 \\ \times \quad 50 \\ \hline 375000 \end{array}$$

III. — *Cuando el multiplicador tiene ceros entre*

1. Esta prueba puede conducir á resultado falso cuando se ha cometido un error de compensación, invirtiendo el orden de las cifras del producto, ó agregando á una de ellas y quitando á otra una misma cantidad.

las cifras significativas, se prescinde de multiplicar por dichos ceros, colocando el producto de las otras cifras en su lugar correspondiente. Ejemplo :

$$\begin{array}{r}
 4,8983 \\
 \times 7,008 \\
 \hline
 391864 \\
 34,2881 \\
 \hline
 34,3272864
 \end{array}$$

IV. — Cuando la primera ó la última cifra del multiplicador es 1, se deja el multiplicando como primer producto parcial, se colocan debajo de él, y en su lugar correspondiente, los productos de las siguientes cifras, y en seguida se suman. Ejemplo :

$472,8 \times 1,97$	$472,8 \times 7,91$
425 52	42552
33 096	33096
931,416	3739,848

99. Observaciones. — 1ª Toda cantidad multiplicada por 1, da por producto la misma cantidad y multiplicada por cero, es cero.

2ª Cuando alguno de los factores se hace cierto número de veces *mayor*, el producto resulta igual número de veces *mayor*.

3ª Cuando alguno de los factores se hace cierto número de veces *menor*, el producto resulta igual número de veces *menor*.

4ª Cuando el multiplicador es una decimal que no contiene enteros, el producto es *mayor* que el multiplicando.

5ª *No se altera el producto* cuando se invierte el orden de los factores.

6ª *No se altera el producto* cuando uno de los factores se *multiplica* y el otro se *divide* por la *misma* cantidad.

7ª Puede considerarse la multiplicación como una *abreviación de la suma* de varias cantidades iguales : el multiplicando es la cantidad que se *suma*, y el multiplicador indica las veces que se debía sumar.

Cuestionario.

¿ Qué es multiplicar? 89. — ¿ Cómo se llaman las cantidades que se dan para multiplicar? 90. — ¿Cuál es el signo de la multiplicación? 91. — ¿Cómo se indica la multiplicación de la suma ó diferencia de varias cantidades por la suma ó diferencia de otras? 92. — ¿Cuáles son los casos de la multiplicación? 93. — ¿Cuáles son los usos de la multiplicación? 84. — ¿Cómo se resuelve el primer caso de la multiplicación? 95. — ¿Cómo se resuelven el segundo y tercer casos de la multiplicación? 96. — ¿Cómo se prueba la operación de multiplicar? 97. — ¿Cómo se multiplica por la unidad seguida de ceros? 98. — ¿Cómo se abrevia la multiplicación cuando alguno ó ambos factores terminan en ceros? 98. — ¿Qué se hace cuando el multiplicador tiene ceros entre las cifras significativas? 98. — ¿Cómo se multiplica por una cantidad que principia ó termina en 1? 98. — ¿Cuál es el producto de toda cantidad multiplicada por 1 ó por cero? 99. — ¿Qué alteración sufre el producto cuando uno de los factores se hace cierto número de veces mayor, ó cierto número de veces menor? 99. — ¿Qué relación guarda el producto con el multiplicando cuando el multiplicador es una fracción decimal que no contiene enteros? 99. — ¿Qué alteración sufre el producto cuando se invierte el orden de los factores, ó cuando uno de ellos se multiplica y el otro se divide por un

mismo número? 99. — ¿De qué manera puede considerarse la multiplicación? 99.

Ejercicios y problemas sobre la multiplicación.

66. — Duplicar, triplicar, cuadruplicar cada uno de los números dígitos.

67. — Quintuplicar, sextuplicar, septuplicar cada uno de los números dígitos.

68. — Hacer ocho, nueve y diez veces mayor cada uno de los números dígitos.

69. — ¿Cuánto costarán 57 metros de género á razón de 5 pesos el metro?

Si un metro de género vale 5 pesos, 2, 3, 4,..... metros valdrán 2 veces, 3 veces, 4 veces.... 5 pesos, y 57 metros valdrán 57 veces 5 pesos, ó sea $57 \times 5 = 285$ pesos.

Explicar del mismo modo :

70. — Luciano tiene 9 cajas que contienen cada una 428 canicas. ¿Cuántas canicas tiene Luciano?

71. — Una gruesa de alfileres tiene doce docenas y cada docena tiene doce alfileres. ¿Cuántos alfileres tiene una gruesa?

72. — ¿Cuántos minutos hay en 275 horas, teniendo la hora 60 minutos?

73. — ¿Cuánto importan 925 barriles de licor á razón de \$ 14,75 cada barril?

74. — ¿Cuánto se debe pagar por lo siguiente :

25 camisas á \$ 1,75.

25 pañuelos á \$ 0,15.

7 pares de calcetines á \$ 0,25.

19 corbatas á \$ 1,25?

DIVISIÓN¹

100. **Definición.** — *Dividir* es averiguar las veces que una cantidad llamada **dividendo**² contiene á otra llamada **divisor**³. Ambas se denominan factores; el resultado se llama **cociente**⁴, y si sobra algo, recibe el nombre de **residuo**⁵.

Se dice también que *dividir es hallar una cantidad que tenga con el dividendo la misma relación que la unidad tiene con el divisor*. Así, cuando vamos á dividir 12 entre cuatro, vamos á encontrar una cantidad que tenga con 12 la misma relación que 1 con 4; es decir, que así como 1 es cuatro veces menor que 4, el número que buscamos ha de ser cuatro veces menor que 12.

101. — La división se indica con el signo $\div$ (*dividido por*), ó bien en forma de quebrado, poniendo el dividendo como *numerador*, y el divisor como *denominador*.

1. Del verbo latino *divido*, dividir, partir.

2. Del latín *dividendus*, el que ha de ser dividido.

3. Del nombre verbal *divisor*, el que divide ó reparte.

4. Del latín *quoties*, cuántas veces.

5. De la palabra latina *residuus*, lo que queda.

Así, 5 dividido por 7 se escribirá $5 \div 7$, ó bien $\frac{5}{7}$.

102. Casos. — *Los casos de la división son tres :*

1° Cuando el dividendo no llega á cien, y tanto el divisor como el cociente constan de una sola cifra.

2° Cuando el dividendo es compuesto y el divisor dígito.

3° Cuando ambos son compuestos.

103. Usos. — *La división tiene los siguientes usos :*

1° Repartir una cantidad entre otra por partes iguales; v. gr. : Repartir 26 pesos entre 9 niños.

2° Hacer una cantidad tantas veces menor como unidades tiene otra; v. gr. : Hacer el número 750, diez veces menor.

3° Ver cuántas veces un número contiene á otro; v. gr. : ¿Cuántas veces el 20 contiene al 5?

4° Reducir unidades de especie menor á mayor; v. gr. : ¿Cuántos pesos son 397 centavos?

5° Conocido el valor de varias unidades y el de una sola, averiguar el número de ellas; v. gr. : ¿Cuántos libros de á 8 pesos se pueden comprar con 484 pesos?

6° Conocido el valor de varias unidades y el número de ellas, determinar el de una sola; v. gr. : ¿Cuánto vale un metro de tela sabiendo que 75^m, 25 han costado \$ 35?

104. — El primer caso se resuelve á la memoria, buscando un número que multiplicado por el divisor dé por producto el dividendo.

105. — El **segundo caso** se resuelve sacando al dividendo la simplificación que indique el divisor : mitad, tercera, cuarta.... según que el divisor sea 2, 3, 4....

106. — El **tercer caso** se resuelve por medio de la siguiente

Regla general. — Para hacer la división se escribe el dividendo y á continuación el divisor (*si hubiere decimales, se iguala previamente el número de ellas, agregando ceros á la derecha del factor que tuviere menos, y si alguno de ellos es una fracción periódica, en vez de agregar ceros se agregarán cifras del período por su orden*); se toman tantas cifras en el primero cuantas haya en el segundo; pero si fuere menor la cantidad del dividendo, se tomará otra cifra. Se dividen la primera ó dos primeras cifras del dividendo por la primera del divisor, para obtener el primer cociente parcial, que se coloca abajo del divisor, se multiplica este cociente por dicho divisor, y el producto se resta de las cifras tomadas en el dividendo : si el producto es mayor que dichas cifras, el cociente deberá ser menor; si la resta es menor que el divisor, el cociente es bueno; en caso contrario, el cociente deberá ser mayor. Luego se baja la siguiente cifra, y se continúa del mismo modo hasta llegar á la última. Si sobra un residuo, se pone al lado del cociente como numerador, dándole por denominador el divisor, ó se pone una coma al fin del cociente y se aproxima por decimales, agregando

un cero al residuo por cada cifra decimal que se quiera obtener.

EJEMPLO¹: ¿Cuántos metros de género de á \$ 1,75 puedo comprar con \$ 658,4375?

Aquí tenemos un problema de dividir, porque conocido el valor de varias unidades (658,4375, importe de los metros que se pueden comprar) y el de una sola (\$ 1,75, valor de un metro), vamos á determinar el número de ellas (el número de metros).

Aplicando la regla, tendremos :

$$\begin{array}{r|l}
 658,43.7.5 & 1,7500 \\
 133\ 437 & \hline
 10\ 9375 & 376,25 \\
 0\ 43750 & \\
 087500 & \\
 00000 &
 \end{array}$$

Resulta que con \$ 658,4375 se pueden comprar 376,25 metros de género de \$ 1,75 el metro.

107. — Para *ensayar los cocientes parciales* no es necesario multiplicar la cifra hallada por todo el divisor, basta multiplicarla mentalmente por las dos ó tres primeras cifras de la izquierda y observar si el producto de la de orden superior se puede restar de la del mismo orden del dividendo.

Cuando la primera cifra del divisor es 1 y la

1. Véase el primer tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor.

segunda 8 ó 9, se considera el 1 como 2 para hallar fácilmente los cocientes parciales.

108. **Prueba.** — La *prueba de la división* se efectúa multiplicando el cociente por el divisor, agregando el residuo, si lo hubiere, debiendo resultar el dividendo.

109. — *La división puede abreviarse* en los siguientes casos :

I. — *Cuando el divisor es la unidad seguida de ceros*, se separan en el dividendo, contando de derecha á izquierda, tantas cifras como ceros tenga el divisor : lo que queda á la izquierda es el cociente, lo que queda á la derecha el residuo. Si hay decimales, *basta correr la coma á la izquierda* tantos lugares como ceros tenga el divisor. EJEMPLO :

$$4758 \div 100 = 47,58 \qquad 375,68 \div 100 = 3,7568.$$

II. — *Cuando ambos factores terminan en ceros*, se suprime igual número de ceros en los dos factores y luego se hace la división. EJEMPLO :

$$475000 \div 41300 = 4750 \div 413.$$

III. — *Cuando sólo el divisor termina en ceros*, se separan en el dividendo, contando de derecha á izquierda, tantas cifras como ceros tenga el divisor : lo que queda á la izquierda de la coma se divide por las cifras significativas, y junto al residuo se bajan todas las cifras separadas antes, dándoles por denominador el divisor, ó si se aproxima, en

vez de agregar ceros se van bajando las cifras separadas. EJEMPLO :

$$\begin{array}{r|l}
 34 \overline{) 76} & 32(00 \\
 2 \overline{) 76} & 1,08625 \\
 200 & \\
 80 & \\
 160 & \\
 00 &
 \end{array}$$

110. Observaciones. — 1ª Toda cantidad dividida por 1 da por cociente la misma cantidad.

2ª La división puede considerarse como una abreviación de la resta, pues el cociente indica las veces que el divisor se puede restar del dividendo.

3ª Cuando el dividendo es menor que el divisor, el cociente es un quebrado cuyo numerador es el dividendo y el denominador el divisor. EJEMPLO :

$$4 \div 7 = \frac{4}{7}$$

4ª Cuando el *dividendo* se *multiplica* por un número, el cociente resulta *multiplicado* por el mismo número.

Sea, por ejemplo : $24 \div 6 = 4$.

Si multiplicamos el dividendo por 2, resultará $48 \div 6 = 8$, cociente 2 veces mayor que 4.

5ª Cuando el divisor se multiplica por un número, el cociente resulta dividido por el mismo número.

Sea, por ejemplo : $24 \div 6 = 4$.

Si multiplicamos el divisor por 2, resultará $24 \div 12 = 2$ cociente 2 veces menor que 4.

6ª Cuando el dividendo se divide por un número, el cociente resulta dividido por el mismo número.

Sea, por ejemplo : $24 \div 6 = 4$.

Si dividimos el dividendo por 2, resultará $12 \div 6 = 2$, cociente 2 veces menor que 4.

7ª Cuando el divisor se divide por un número, el cociente resulta multiplicado por el mismo número.

Sea, por ejemplo : $24 \div 6 = 4$.

Si dividimos el divisor por 2, resultará $24 \div 3 = 8$, cociente 2 veces mayor que 4.

8ª Cuando el dividendo y el divisor se multiplican ó se dividen por un mismo número, el cociente no se altera.

Sea, por ejemplo : $24 \div 6 = 4$.

Si multiplicamos el dividendo y el divisor por 2, resulta $48 \div 12 = 4$.

Si dividimos el dividendo y el divisor por 2, resultará $12 \div 3 = 4$.

9ª El número de cifras del cociente es igual al número de cifras del dividendo, menos el número de cifras del divisor, ó una más.

10ª Cuando el divisor es una fracción decimal, el cociente es mayor que el dividendo.

EJEMPLO : $4 \div 0,5 = 8$.

11ª Si el producto de dos factores se divide por uno de ellos, el cociente será el otro factor.

Cuestionario.

¿Qué cosa es dividir? 100. — ¿Cómo se indica la división? 101. — ¿Cuáles son los casos de la división? 102. — ¿Cuáles son los usos de la división? 103. — ¿Cómo se resuelve el primer caso de la división? 104. — ¿Cómo se resuelve el segundo caso de la división? 105. — ¿Cómo se resuelve el tercer caso de la división? 106. — ¿Cómo se ensayan los cocientes parciales de una división? 107. — ¿Cómo se prueba la división? 108. — ¿En qué casos puede abreviarse la división? 109. — ¿Cuál es el cociente de toda cantidad dividida por 1? 110. — ¿De qué otro modo puede considerarse la división? 110. — ¿A qué es igual el cociente de toda división cuyo dividendo es menor que el divisor? 110. — ¿Qué alteración sufre el cociente cuando el dividendo ó el divisor se multiplican ó se dividen por un número? 110. — ¿Qué alteración sufre el cociente cuando el dividendo ó el divisor se dividen por un número? 110. — ¿Qué alteración sufre el cociente cuando el dividendo y el divisor se multiplican ó se dividen por un mismo número? ¿De cuántas cifras consta el cociente de una división? 110. — ¿Cómo es el cociente respecto del dividendo cuando el divisor es una fracción decimal que no contiene enteros? 110. — Si el producto de dos factores se divide por uno de ellos, ¿cuál es el cociente? 110.

Ejercicios y problemas sobre la división.

75. — ¿Qué números multiplicados por 4 dan respectivamente por productos los números : 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, y 36?

76. — ¿Qué números multiplicados por 9 dan respectivamente por productos los números 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72 y 81?

77. — Por 12 metros de género se han pagado 84 pesos. ¿Cuál es el valor de 1 metro?

Si 12 metros valen 84 pesos, 1 metro valdrá 12 veces menos que 84, luego se tendrá que dividir 84 entre 12, y el cociente 7 dará el precio pedido.

Explicar del mismo modo.

78. — ¿Cuántas horas hay en 1620 minutos?

79. — Se quieren repartir \$ 4285 entre 5 personas. ¿Cuánto le corresponde á cada una?

80. — El producto de dos factores es 248199742 y uno de ellos es 61957 ¿Cuál es el otro?

81. — Una llave llena en 8 horas un depósito de 3248 litros de capacidad. ¿Cuántos litros da por hora?

ABREVIACIONES

DE LA MULTIPLICACIÓN Y DIVISION

111. — *Para multiplicar* : por 5, se agrega un cero y se saca la mitad.

Por $12\frac{1}{2}$, se agregan dos ceros y se saca octava.

Por 25, se agregan dos ceros y se saca cuarta.

Por 75, se agregan dos ceros, se saca cuarta y el cociente se resta del multiplicando.

Por 125, se agregan tres ceros y se saca octava.

Por una serie de nueves, se agregan al multiplicando tantos ceros como nueves haya en el multiplicador y del producto se resta el mismo multiplicando.

112. — *Para dividir* : por $6\frac{1}{4}$ se multiplica por 16 y se separan dos cifras decimales.

Por $12\frac{1}{2}$ se multiplica por 8 y se separan dos cifras decimales.

Por 25, se multiplica por 4 y se separan dos cifras decimales.

Por 75, se saca tercera, se suma y se separan dos cifras decimales.

Por 125, se multiplica por 8 y se separan tres cifras decimales.

Cuestionario.

¿Cómo se multiplica abreviadamente por 5? 111. — ¿Cómo se multiplica abreviadamente, por $12\frac{1}{2}$?, por 25?, por 75?, por 125?, por una serie de nueves? 111. — ¿Cómo se divide abreviadamente, por $6\frac{1}{4}$?, por $12\frac{1}{2}$?, por 25?, por 75? por 125?, 112.

DIVISIBILIDAD DE LOS NÚMEROS

113. — Una cantidad es *divisible exactamente* :

Por 2, cuando termina en cero ó número par.

Por 3, cuando la *suma* de sus cifras es *tres* ó *múltiplo de tres*.

Por 4, cuando sus dos *últimas* cifras son *ceros* ó *forman* un número divisible por *cuatro*.

Por 5, cuando acaba en *cinco* ó en *cero*.

Por 6, cuando tiene *mitad* y *tercera*.

Por 7, cuando *multiplicando* ordenadamente las unidades, decenas, etc., de la cantidad por las cifras del período **1, 3, 2, 6, 4 y 5**, la *suma de estos productos* sea divisible por 7.

Por 8, cuando las *tres últimas* cifras son *ceros* ó *forman* un número divisible por 8.

Por 9, cuando la *suma* de sus cifras es 9 ó *múltiplo* de 9.

Por 10, cuando *acaba* en *cero*.

Por 11, cuando dividiendo la cantidad en períodos de dos cifras, comenzando por la derecha, la suma de estos períodos es un *múltiplo* de *once*.

Por 12, cuando lo es por 3 y por 4.

Cuestionario.

¿Cuándo es una cantidad divisible por 2?, por 3?, por 4?, por 5?, por 6?, por 7?, por 8?, por 9?, por 10?, por 11?, por 12? 113.

124. — TABLA PARA ELEVAR Á POTENCIAS

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2167	6581	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

125. — Cuando el exponente es un número considerable, se descompone en números iguales ó múltiplos unos de otros, se eleva la cantidad á las potencias indicadas por estos números y se multiplican entre sí los resultados obtenidos. EJEMPLO :

$$2^{11} = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^2 = 8 \times 8 \times 8 \times 4 = 8^3 \times 4 = 2048.$$

126. — Se puede también elevar una cantidad á una potencia superior, descomponiendo el expo-

nente en sus factores primos y elevando sucesivamente la cantidad á las potencias indicadas por los mismos factores. EJEMPLO :

$$3^{12} = ((3^3)^2)^2 = (27^2)^2 = 729^2 = 531441$$

127. — Para descomponer un número en sus factores primos, se divide *sucesivamente* por los números primos 2, 3, 5, 7, 11, etc., cuantas veces se pueda; y la cantidad será igual al producto de los números que sirvieron de divisores. EJEMPLO :

41580	2	$41580 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11$
20790	2	
10395	3	
3465	3	
1155	3	
385	5	
77	7	
11	11	
1	.	

128. — Menor múltiplo común de varios números es el menor número que puede ser divisible exactamente por ellos; así el menor múltiplo de 4, 12 y 18 es 36, porque este es el menor número que puede tener, á la vez, cuarta, doceava y diez y ochava.

129. — Para encontrar el menor múltiplo común de varios números, se comienza por suprimir los que sean factores de otros de los propuestos;

124. -- TABLA PARA ELEVAR Á POTENCIAS

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2167	6581	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

125. — Cuando el exponente es un número considerable, se descompone en números iguales ó múltiplos unos de otros, se eleva la cantidad á las potencias indicadas por estos números y se multiplican entre sí los resultados obtenidos. EJEMPLO :

$$2^{11} = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^2 = 8 \times 8 \times 8 \times 4 = 8^3 \times 4 = 2048.$$

126. — Se puede también elevar una cantidad á una potencia superior, descomponiendo el expo-

nente en sus factores primos y elevando sucesivamente la cantidad á las potencias indicadas por los mismos factores. EJEMPLO :

$$3^{12} = ((3^3)^2)^2 = (27^2)^2 = 729^2 = 531441$$

127. — Para descomponer un número en sus factores primos, se divide *sucesivamente* por los números primos 2, 3, 5, 7, 11, etc., cuantas veces se pueda; y la cantidad será igual al producto de los números que sirvieron de divisores. EJEMPLO :

41580	2	$41580 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11$
20790	2	
10395	3	
3465	3	
1155	3	
385	5	
77	7	
11	11	
1	.	

128. — Menor múltiplo común de varios números es el menor número que puede ser divisible exactamente por ellos; así el menor múltiplo de 4, 12 y 18 es 36, porque este es el *menor* número que puede tener, á la vez, cuarta, doceava y diez y ochava.

129. — Para encontrar el menor múltiplo común de varios números, se comienza por suprimir los *qué sean factores de otros* de los propuestos;

se descomponen los restantes en sus factores primos, y el menor múltiplo es igual al producto de los factores primos **diferentes** de estos números, afectado cada uno de ellos **del mayor** de sus exponentes. Ej. : Encontrar el menor múltiplo de los números 4, 9, 36, y 48.

36 2		48 2
18 2		24 2
9 3	$36 = 2^2 \times 3^2$	12 2
3 3	$48 = 2^4 \times 3$	6 2
1		3 3
	Menor múltiplo $2^4 \times 3^2 = 144$	1

130. Máximo común divisor de varios números *es el mayor número que los puede dividir exactamente.*

131. — Para encontrar el máximo común divisor de dos números, hay dos métodos :

1° Se divide la cantidad mayor por la menor ; en seguida el residuo se hace divisor ; el que era divisor, dividendo ; y así se continúa la operación hasta que no quedare residuo ; en cuyo caso, el último divisor será el máximo común divisor. **EJEMPLO :**

Hallar el máximo común divisor de los números 1720 y 176.

1720	176	136	40	16	8	0
	9	1	3	2	2	

El máximo común divisor de los números propuestos es 8.

2° Se comienza por suprimir los que sean *múltiplos de otros* de los propuestos; se descomponen los restantes en sus factores primos y el máximo común divisor es igual al producto de los factores primos **comunes**, afectado cada uno de ellos **del menor** de sus exponentes. EJEMPLO :

1720 2	176 2	$1720 = 2^3 \times 5 \times 43$
860 2	88 2	$176 = 2^4 \times 11$
430 2	44 2	
215 5	22 2	Máximo c. d. = $2^3 = 8$
43 43	11 11	
1	1	

(Este método es más ventajoso que el anterior).

132. — *Para encontrar el menor múltiplo común de varios números, conociendo su máximo común divisor*, se multiplica éste por los cocientes que resulten de dividir cada uno de los números propuestos entre el máximo común divisor, y el producto será el menor múltiplo común. EJEMPLO :

Sean los números 1720 y 176, cuyo máximo común divisor es 8.

$$\begin{aligned}
 1720 \div 8 &= 215 \\
 176 \div 8 &= 22 \\
 \text{m. m. c.} &= 8 \times 22 \times 215 = 37840
 \end{aligned}$$

133. — *El número de divisores exactos de una*

cantidad es igual al producto de los exponentes de los factores primos en que se pueda descomponer, *aumentados una unidad*. Así $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$, tendrá $(3 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 4 \times 3 \times 2 = 24$ divisores.

134. — *Para encontrar todos los divisores de un número*, se le descompone en sus factores primos, se escriben en líneas horizontales los números, 1, 2 y todas las potencias de 2 *contenidas en dicho número*; 1, 3 y todas las potencias de 3 contenidas en dicho número, y así sucesivamente; luego se multiplica cada cifra de la 2ª línea por todas de la 1ª; cada una de las de la 3ª por todas las del producto anterior; y continuando así la operación, se encontrarán todos los divisores del número. EJEMPLO :

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

Resultan divisores :

Originados por el 2 : 1, 2, 4, 8.

Originados por el 3 : 1, 3, 9.

Originados por el 5 : 1, 5.

Multiplicando cada cifra de la 2ª línea por todas las de la 1ª resulta :

1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72.

Multiplicando ahora todos estos divisores por cada uno de los originados por el 5, se tienen los números :

1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 9, 18, 36, 72, 5, 10, 20,

40, 15, 30, 60, 120, 45, 98, 180, 360, que dividen exactamente á 360¹.

Cuestionario.

¿Qué es número primo? 114. — ¿Cuál es la regla para saber si un número es primo? 115. — ¿Qué son números primos entre sí? 116. — Cuando es una cantidad divisible por dos números primos entre sí, ¿por qué otro número es divisible? 117. — ¿Qué es número múltiplo? 118. — ¿Qué es submúltiplo? 119. — ¿A qué se llama potencia? 120. — ¿Qué es raíz? 121. — ¿Qué es exponente? 122. — ¿Cómo se eleva un número á una potencia? 123. — ¿Cuáles son los cuadrados y los cubos de los números dígitos? 124. — ¿Cómo se eleva un número á una potencia cuando el exponente es un número considerable? 125 y 126. — ¿Cómo se descompone un número en sus factores primos? 127. — ¿Qué es menor múltiplo común de varios números? 128. — ¿Cómo se encuentra el menor múltiplo común de varios números? 129. — ¿Qué es máximo común divisor de varios números? 130. — ¿Cómo se encuentra el máximo común divisor de dos números? 131. — ¿Cómo se encuentra el menor múltiplo valiéndose del máximo común divisor? 132. — ¿A qué es igual el número de divisores exactos de una cantidad? 133. — ¿Cómo se encuentran todos los divisores de un número? 134.

Ejercicios y problemas sobre factores y divisores.

82. — Descomponer en sus factores primos los números : 520, 476, 480 y 729.

83. — Descomponer en sus factores primos los números : 4000, 74910, 32875 y 1461.

84. — ¿Cuál es el máximo común divisor de los números : 60, 24 y 72?

85. — Encontrar el máximo común divisor de los números : 320, 540, 2600 y 4320.

86. — Encontrar el máximo común divisor de los números : 24634 y 1728.

87. — Encontrar el menor múltiplo de los números : 12, 27; 75 y 24.

1. Véase el segundo tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor.

88. — Encontrar el menor múltiplo de los números 4032 y 6048.
89. — Encontrar el menor múltiplo de los números : 60, 24 y 72.
90. — Encontrar todos los números que dividan exactamente á 16807.
91. — Hallar todos los divisores del número 387420489.
92. — Elevar el número 7 á la 12ª potencia.
93. — ¿Cuál es la 17ª potencia del número 2?
94. — ¿Cuáles son los divisores comunes á los números : 60, 24 y 72?
95. Determinar el menor múltiplo de los números 5832 y 774 conociendo su máximo común divisor 18.
96. — Encontrar el menor múltiplo de los números 1260 y 990 buscando previamente su máximo común divisor.
97. — Buscar el menor múltiplo de los números : 58, 174, 888 y 962 valiéndose de su máximo común divisor.
98. — Encontrar todos los divisores del número 2097152.
99. — Elevar el número 9 á la novena potencia.
-

QUEBRADOS COMUNES

135. — Los quebrados comunes se dividen en *propios* é *impropios*; *simples* y *compuestos*.

136. **Quebrado propio** es aquel cuyo valor es *menor* que la unidad y se conoce en que el numerador es *menor* que el denominador.

EJEMPLO : $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{8}$.

137. — **Quebrado impropio** es aquel cuyo valor es *igual* ó *mayor* que la unidad; se conoce en que el numerador es *igual* ó *mayor* que el denominador. EJEMPLO : $\frac{4}{4}$ $\frac{5}{3}$.

138. — **Quebrado simple** es el que expresa partes de un entero como $\frac{3}{8}$ de peso, y **compuesto** el que expresa partes de otro quebrado, como $\frac{3}{8}$ de $\frac{7}{8}$.

139. — Los quebrados compuestos *se reducen á simples* multiplicando los numeradores, cuyo producto es numerador, y los denominadores, cuyo producto es denominador. EJEMPLO : $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{3}$ de \$
 $= \frac{3}{12}$ \$.

140. — *Para dar á un entero la forma de quebrado* basta darle por denominador la unidad.

EJEMPLO : $7 = \frac{7}{1}$.

141. — *Para reducir un entero á fracción de determinado denominador*, se multiplica el entero por el denominador que se quiera que lleve la fracción, y al producto se le da por denominador el mismo número por el cual se multiplicó. EJEMPLO : 4 reducido á novenos $= \frac{36}{9}$.

142. — *Para reducir un mixto á quebrado* se multiplica el entero por el denominador, al producto se le agrega el numerador, y á la suma se le da por denominador el mismo. EJEMPLO :

$$4\frac{2}{5} = \frac{4 \times 5 + 2}{5} = \frac{22}{5}.$$

143. — *Para sacar los enteros de un quebrado impropio* se divide el numerador por el denominador; el cociente señalará los enteros y la resta será un nuevo numerador que tendrá por denominador el divisor. EJEMPLO¹ :

$$\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

144. — **Valuar quebrados** es expresar su valor en unidades de especie inferior á aquella que tiene el quebrado.

145. — *Se valúa un quebrado propio* multiplicando su numerador por el número de unidades menores que contenga la unidad á que se refiere, y dividiendo el producto por el denominador.

1. Véase el segundo tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor.

EJEMPLO :

$$\frac{3}{4} \text{ de día} = \frac{3 \times 24 \text{ horas}}{4} = \frac{72}{4} \text{ de hora} = 18 \text{ horas.}$$

146. — **El valor de un quebrado puede sufrir las variaciones siguientes :**

1ª Si se *multiplica* el *numerador*, el quebrado resulta *multiplicado* por el mismo número.

2ª Si se *multiplica* el *denominador*, el quebrado resulta *dividido*.

3ª Si se *divide* el *numerador*, el quebrado resulta *dividido*.

4ª Si se *divide* el *denominador*, el quebrado resulta *multiplicado*.

En resumen, el valor de un quebrado sufre variaciones *iguales á las del numerador y contrarias á las del denominador*.

147. — *El valor de un quebrado no se altera cuando el numerador y el denominador se multiplican ó dividen por un mismo número.*

148. — De varios quebrados de *igual numerador*, es mayor el que tenga *menor denominador*. Entre $\frac{2}{8}$, $\frac{2}{3}$ y $\frac{2}{5}$ el mayor es $\frac{2}{3}$.

149. — Si los *denominadores son iguales*, es mayor el que tenga *mayor numerador*.

De los quebrados $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ y $\frac{1}{8}$, el mayor es $\frac{5}{8}$.

150. — Si tienen distintos numeradores y denominadores, hay que reducirlos á un *común denominador* para saber cuál es el mayor.

151. — **Reducir quebrados á un común**

denominador es transformarlos en otros de *igual valor*, cuyo denominador sea *el mismo*.

152. — *Para reducir los quebrados á un común denominador* hay dos métodos :

1° Se multiplican *los dos términos de cada quebrado* por el producto de los denominadores de los otros. **EJEMPLO :**

$$\frac{3}{8} + \frac{2}{4} + \frac{5}{12} = \frac{3 \times 48}{8 \times 48} + \frac{2 \times 96}{4 \times 96} + \frac{5 \times 32}{12 \times 32} = \frac{144}{384} + \frac{129}{384} + \frac{160}{384}$$

2° Se multiplican *los dos términos de cada quebrado* por el *cociente* que resulte de dividir el menor múltiplo de los denominadores por el denominador de cada uno. **EJEMPLO * :**

$$\frac{3}{8} + \frac{2}{4} + \frac{5}{12} = \frac{3 \times 3}{8 \times 3} + \frac{2 \times 6}{4 \times 6} + \frac{5 \times 2}{12 \times 2} = \frac{9}{24} + \frac{12}{24} + \frac{10}{24}$$

(Este método, como se ve, tiene sobre el anterior la ventaja de que los quebrados resultan simplificados).

153. — **Simplificar quebrados** es transformarlos en otros *de igual valor* cuyos términos sean más sencillos; esto se consigue dividiendo el numerador y denominador por *un mismo número*.

EJEMPLO :

$$\frac{24}{32} = \frac{24 \div 8}{32 \div 8} = \frac{3}{4}$$

154. — Cuando un quebrado no puede simplifi-

1. Véase el segundo tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor.

carse, se puede obtener su valor *aproximado* dividiendo sus dos términos por el numerador. EJEMPLO :

$$\frac{4691}{9673} = \frac{1}{2} \text{ (aproximadamente).}$$

Cuestionario.

¿ En qué se dividen los quebrados comunes ? 135. — ¿ Qué es quebrado propio ? 136. — ¿ Qué es quebrado impropio ? 137. — ¿ Qué es quebrado simple ? 138. — ¿ Qué es quebrado compuesto ? 138. — ¿ Cómo se reducen los quebrados compuestos á simples ? 139. — ¿ Cómo se le da á un entero la forma de quebrado ? 140. — ¿ Cómo se reduce un entero á fracción de determinado denominador ? 141. — ¿ Cómo se reduce un mixto á quebrado ? 142. — ¿ Qué cosa es valuar quebrados ? 143. — ¿ Cómo se valúa un quebrado propio ? 144. — ¿ Cómo se sacan los enteros de un quebrado impropio ? 145. — ¿ Qué variaciones sufre el valor de un quebrado respecto del numerador y del denominador. 146. — ¿ En qué casos no se altera el valor de un quebrado ? 147. — De varios quebrados de igual numerador ¿ cuál es el mayor ? 148. — De varios quebrados de igual denominador ¿ cuál es el mayor ? 149. — De varios quebrados de distintos numeradores y denominadores ¿ cuál es el mayor ? 150. — ¿ Qué es reducir los quebrados á un común denominador ? 151. — ¿ Cuántos métodos hay para reducir los quebrados á un común denominador ? 152. — ¿ En qué consiste el primer método ? 152. — ¿ En qué consiste el segundo método ? 152. — ¿Cuál de estos dos métodos es más ventajoso ? 152. — ¿ Qué es simplificar quebrados ? 153. — ¿ Cómo se simplifican los quebrados ? 153. — ¿ Cómo se obtiene el valor aproximado de un quebrado que no puede simplificarse ? 154.

SUMAR QUEBRADOS

155. — Para sumar un quebrado con un entero, ó un entero con un quebrado, se multiplica el entero por el denominador, al producto se agrega el numerador, y se le da á la suma por denominador el mismo. EJEMPLO :

$$\$ \frac{3}{8} + 7 = \frac{7 \times 8 + 3}{8} = \frac{59}{8} \$.$$

156. — Para sumar quebrados con quebrados, se reducen á un común denominador, si no lo tienen, se suman los numeradores y á la suma se le da por denominador el denominador común. EJEMPLO :

$$\$ \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{6}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \$.$$

157. — Para sumar mixtos con mixtos se suman ante todo los quebrados; si de esta suma resultan enteros, se llevan á sumar con los enteros sumandos. EJEMPLO ¹ :

1. Véase el segundo tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor.

$$\text{\$ } 5 + \frac{2}{8} = 5 + \frac{2}{8}$$

$$\text{\$ } 3 + \frac{1}{2} = 3 + \frac{4}{8}$$

$$\text{\$ } 6 + \frac{3}{4} = 6 + \frac{6}{8}$$

$$\text{\$ } 15 + \frac{4}{8}$$

Cuestionario.

¿Cómo se suma un quebrado con un entero? 155. — ¿Cómo se suma un quebrado con otro quebrado? 156. — ¿Cómo se suma un mixto con otro mixto? 157.

Ejercicios y problemas sobre la adición de quebrados.

100. — Sumar los quebrados :

$$\frac{4}{9} + \frac{2}{2} + \frac{5}{2}$$

101. — Sumar los quebrados :

$$\frac{7}{11} + \frac{2}{11} + \frac{9}{11} + \frac{4}{11}$$

102. — Sumar los quebrados :

$$\frac{7}{18} + \frac{1}{2} + \frac{2}{8} + \frac{5}{9} + \frac{9}{12}$$

103. — Sumar los quebrados :

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{7}{32}$$

104. — Sumar $7 + \frac{3}{8} + \frac{5}{9} + 9 + \frac{2}{5}$

105. — Sumar $4\frac{2}{3}$, $4\frac{5}{8}$ y $7\frac{4}{8}$

106. — Sumando los $\frac{7}{8}$ de un número con $\frac{1}{12}$ del mismo número ¿qué fracción resulta?

107. — Un obrero puede terminar una obra en 2 días, otro en 4 y otro en 8. ¿Qué parte de la obra harán los tres juntos durante un día?

En un un día harán : el primer obrero $\frac{1}{8}$ de la obra, el segundo $\frac{1}{4}$ y el tercero $\frac{1}{8}$; los tres juntos harán

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \text{ de la obra.}$$

Explicar del mismo modo :

108. — Una fuente tiene tres llaves : abriendo la primera se llena la fuente en 2 horas, abriendo la segunda se llena en 3 horas y abriendo la tercera se llena en 6 horas. Si se abren las tres llaves juntamente ¿qué parte de la fuente llenarán en una hora?

RESTAR QUEBRADOS

158. — Para restar un quebrado de un entero hay dos métodos : 1° Se multiplica el entero por el denominador y del producto se resta el numerador. EJEMPLO :

$$7 - \frac{2}{8} = \frac{(7 \times 8) - 2}{8} = \frac{56 - 2}{8} = \frac{54}{8}.$$

2° Se disminuye el entero una unidad, poniendo en seguida un quebrado que tenga por numerador la diferencia que hay entre ambos términos y por denominador el mismo. EJEMPLO :

$$7 - \frac{2}{8} = 6 \frac{6}{8}.$$

159. — Para restar un entero de un quebrado se multiplica el entero por el denominador. y el producto se resta del numerador. EJEMPLO :

$$\frac{3}{8} - 4 = \frac{3 - (4 \times 8)}{8} = \frac{3 - 32}{8} = -3 \frac{5}{8}.$$

160. — Para restar un quebrado de otro

quebrado se reducen á un común denominador; si no lo tienen, se restan los numeradores y á la resta se le da por denominador el denominador común. EJEMPLO ¹ :

$$\frac{4}{8} - \frac{2}{5} = \frac{20 - 16}{40} = \frac{4}{40}.$$

161. — Para restar mixtos se restan ante todo los quebrados y á continuación los enteros. EJEMPLO :

$$\begin{array}{r} 3 \text{ ——— } \frac{3}{8} \\ - 1 \text{ ——— } \frac{3}{10} \\ \hline 2 \text{ ——— } \frac{1}{10}. \end{array}$$

Cuestionario.

¿Cómo se resta un quebrado de un entero? 158. — ¿Cómo se resta un entero de un quebrado? 159. — ¿Cómo se resta un quebrado de otro quebrado? 160. — ¿Cómo se resta un mixto de otro mixto? 161.

Ejercicios y problemas sobre restar quebrados.

109. — Restar los quebrados :

$$\frac{3}{7} - \frac{2}{7}.$$

110. — Restar los quebrados :

$$\frac{12}{14} - \frac{7}{14}.$$

111. — De 14 unidades restar $\frac{7}{8}$.

1. Véase el segundo tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor.

112. — Restar los quebrados :

$$\frac{13}{28} - \frac{8}{96}$$

113. — Restar

$$14\frac{2}{8} - 7\frac{1}{2}$$

114. — Una persona gana \$ 27 $\frac{3}{4}$ y gasta 10 $\frac{3}{8}$ ¿ Cuánto le queda ?

115. Si de una pieza de género de 15 metros de largo corto 4 metros $\frac{1}{8}$ ¿ Cuánto queda ?

116. — He gastado el tercio y los $\frac{4}{7}$ de mi dinero ¿ Cuánto me queda ?

117. — Un viajero que debe recorrer 14 kilómetros $\frac{3}{4}$ lleva recorridos 9 kilómetros $\frac{1}{8}$ ¿ Cuánto le falta ?

118. — Si de una pieza de género que mide 58 metros se vende primero 9 metros $\frac{1}{4}$, luego 12 metros $\frac{7}{8}$ y por último 2 metros $\frac{1}{8}$ ¿ Cuánto queda ?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
A b c d e f g h i j k l m

MULTIPLICAR QUEBRADOS

162. — Para multiplicar un quebrado por un entero, ó un entero por un quebrado, se multiplica el numerador ó se divide el denominador (si es divisible) por el entero. EJEMPLO :

$$3 \times \frac{4}{8} = \frac{3 \times 4}{8} = \frac{12}{8} \quad 2 \times \frac{2}{8} = \frac{2}{8 \div 2} = \frac{2}{4}$$

163. — Cuando el entero es igual al denominador, el resultado es el numerador. EJEMPLO :

$$3 \times \frac{1}{3} = 2.$$

164. — Para multiplicar un quebrado por otro se multiplica numerador por numerador, cuyo producto es numerador, y denominador por denominador, cuyo producto es denominador. EJEMPLO :

$$\frac{3}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{3 \times 7}{5 \times 8} = \frac{21}{40}$$

165. — Si el numerador de uno es igual al denominador de otro, se excluyen los términos

iguales, siendo el resultado los otros dos. EJEMPLO :

$$\frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{64}.$$

166. — Para multiplicar mixtos : 1° Se reducen á quebrados y se hace la multiplicación de quebrados. EJEMPLO :

$$2\frac{3}{4} \times 7\frac{1}{2} = \frac{11}{4} \times \frac{15}{2} = \frac{165}{8} = 20\frac{5}{8}.$$

2° Se forma el producto de todo el multiplicando, primero por el quebrado y luego por el entero, y se suman estos productos parciales. EJEMPLO¹ :

$$\begin{array}{r}
 2 + \frac{3}{4} \\
 \times 7 + \frac{1}{2} \\
 \hline
 \frac{1}{2} \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4} = \dots \frac{3}{8} \\ 2 = 4 \dots \end{array} \right. \\
 7 \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4} = 5 \dots \frac{1}{4} \\ 2 = 14 \dots \end{array} \right. \\
 \hline
 20 \dots \frac{5}{8}
 \end{array}$$

Cuestionario.

¿Cómo se multiplica un quebrado por un entero? 162. —
 ¿Cuándo se puede abreviar la multiplicación de un quebrado por un entero? 163. — ¿Cómo se multiplica un quebrado por otro quebrado? 164. — ¿Cuándo se puede abreviar la multiplicación de un quebrado por otro? 165. — ¿Cuántos y cuáles son los métodos para multiplicar números mixtos? 166.

1. Véase el 2° tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor.

Ejercicios y problemas sobre multiplicar quebrados.

119. — Multiplicar

$$\frac{4}{8} \text{ por } \frac{3}{5}.$$

$$\frac{7}{9} \text{ por } 6.$$

$$\frac{3}{8} \text{ por } \frac{7}{12}.$$

$$9 \text{ por } \frac{2}{8}.$$

120. — Multiplicar

$$\frac{7}{20} \text{ por } 4.$$

$$\frac{3}{8} \text{ por } 8.$$

$$\frac{4}{8} \text{ por } \frac{8}{12}.$$

$$\frac{3}{5} \text{ por } \frac{2}{3}.$$

121. — Tomar la mitad de $\frac{3}{8}$.122. — Tomar los $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{9}$ 123. — ¿Cuáles son los $\frac{3}{4}$ de 76 pesos?124. — Si un obrero hace $\frac{7}{8}$ de una obra en un día ¿Qué parte de la obra hará en $\frac{2}{5}$ de día?125. — Si un metro de género cuesta 9 pesos ¿Cuánto costarán $\frac{5}{9}$ de metro?126. — ¿Cuánto importarán 7 $\frac{1}{2}$ docenas de huevos á $\frac{7}{8}$ de peso la docena?127. — ¿Cuánto importan 9 $\frac{2}{3}$ litros de petróleo á razón de $\frac{1}{9}$ de peso el litro?128. — Comprando primero 4 metros $\frac{2}{3}$ luego 6 $\frac{2}{3}$ metros y luego 10 metros $\frac{3}{4}$, todo á \$ 4 $\frac{2}{3}$ ¿Cuánto debo pagar?

DIVIDIR QUEBRADOS

167. — Para dividir un quebrado por un entero se divide el numerador (si es divisible), ó se multiplica el denominador por el entero. EJEMPLO :

$$\frac{12}{24} \div 4 = \frac{12 \div 4}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$
$$\frac{12}{24} \div 4 = \frac{12}{24 \times 4} = \frac{12}{96} = \frac{1}{8}.$$

168. — Para dividir un entero por un quebrado se multiplica el entero por el denominador y al producto se le da por denominador el numerador. EJEMPLO :

$$5 \div \frac{3}{8} = \frac{5 \times 8}{3} = \frac{40}{3}.$$

169. — Si el entero es igual al numerador, el cociente es el denominador. EJEMPLO :

$$7 \div \frac{7}{8} = 8.$$

170. — Para dividir un quebrado por otro

se multiplica el numerador del primero por el denominador del segundo, cuyo producto es numerador, y el numerador del segundo por el denominador del primero, cuyo producto es denominador. EJEMPLO :

$$\frac{3}{8} \div \frac{5}{9} = \frac{3 \times 9}{8 \times 5} = \frac{27}{40}.$$

171. — *Si los numeradores son iguales*, el denominador del segundo es numerador y el denominador del primero denominador del cociente.

EJEMPLO :

$$\frac{3}{8} \div \frac{3}{4} = \frac{4}{8}.$$

172. — *Si los denominadores son iguales*, el numerador del primero es numerador, y el numerador del segundo, denominador del cociente.

EJEMPLO :

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{4} = \frac{3}{5}.$$

173. — Para dividir un mixto por otro mixto se reducen ambos á quebrados, quedando la operación reducida á dividir quebrados. EJEMPLO ¹ :

$$3\frac{2}{6} \div 2\frac{1}{2} = \frac{20}{6} \div \frac{5}{2} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

1. Véase el segundo tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor.

Cuestionario.

¿Cómo se divide un quebrado por un entero? 167. — ¿Cómo se divide un entero por un quebrado? 168. — ¿Cuándo puede abreviarse la división de un entero por un quebrado? 169. — ¿Cómo se divide un quebrado por otro quebrado? 170. — ¿Cuándo puede abreviarse la división de un quebrado por otro quebrado? 171 y 172. — ¿Cómo se divide un mixto por otro mixto? 173.

Ejercicios y problemas sobre dividir quebrados.

129. — Dividir :

$$\frac{7}{8} \text{ entre } 6.$$

$$\frac{3}{9} \text{ entre } 12.$$

$$\frac{2}{3} \text{ entre } 8.$$

$$\frac{4}{9} \text{ entre } 5.$$

130. — Dividir :

$$\frac{4}{8} \text{ entre } 2.$$

$$\frac{12}{27} \text{ entre } 3.$$

$$\frac{21}{46} \text{ entre } 7.$$

$$\frac{15}{40} \text{ entre } 5.$$

131. — Dividir :

$$7 \text{ entre } \frac{2}{6}.$$

$$14 \text{ entre } \frac{3}{5}.$$

$$9 \text{ entre } \frac{7}{8}.$$

$$6 \text{ entre } \frac{12}{25}.$$

132. — Dividir :

$$7 \text{ entre } \frac{7}{9}.$$

$$8 \text{ entre } \frac{8}{12}.$$

$$12 \text{ entre } \frac{12}{74}.$$

$$25 \text{ entre } \frac{25}{38}.$$

133. — Dividir :

$$\frac{2}{5} \text{ entre } \frac{2}{9}.$$

$$\frac{3}{9} \text{ entre } \frac{5}{7}.$$

$$\frac{7}{25} \text{ entre } \frac{14}{23}.$$

$$\frac{9}{11} \text{ entre } \frac{10}{13}.$$

134. — Dividir :

$$\frac{8}{12} \text{ entre } \frac{8}{9}.$$

$$\frac{3}{6} \text{ entre } \frac{3}{8}.$$

$$\frac{7}{8} \text{ entre } \frac{7}{15}.$$

$$\frac{14}{18} \text{ entre } \frac{14}{96}.$$

135. — Dividir :

$$\frac{3}{5} \text{ entre } \frac{4}{5}.$$

$$\frac{7}{9} \text{ entre } \frac{8}{9}.$$

$$\frac{12}{18} \text{ entre } \frac{14}{18}.$$

$$\frac{19}{21} \text{ entre } \frac{28}{21}.$$

136. — Dividir :

$$4 + \frac{2}{3} \text{ entre } 3 + \frac{1}{2}.$$

$$7 + \frac{1}{2} \text{ entre } 9 + \frac{2}{8}.$$

$$6 + \frac{3}{5} \text{ entre } 14 + \frac{7}{9}.$$

$$12 + \frac{7}{8} \text{ entre } 19 + \frac{6}{8}.$$

137. — Se han pagado \$ 9 por $\frac{7}{8}$ de metro ¿Cuánto vale un metro?

138. — Una llave produce 7 litros de agua en 4 minutos ¿Cuántos litros produce por minuto?

139. — 19 personas recibieron \$ 275 $\frac{3}{8}$ ¿Cuánto recibió cada una?

CONVERSIÓN

DE LOS QUEBRADOS COMUNES EN DECIMALES Y VICEVERSA

174. + Para convertir un quebrado común en decimal se divide el numerador por el denominador, agregando un cero al residuo por cada cifra decimal que se quiera obtener. EJEMPLO :

$$\frac{7}{8} = 0,875.$$

175. — **Período** es el conjunto de cifras diversas repetidas á intervalos iguales y dispuestas siempre del mismo modo.

176. — Fracción **periódica simple** es aquella en que el período comienza *inmediatamente después* de la coma; v. gr. :

0,27 27 27 27que se abrevia así : 0,(27)

177. — Fracción **periódica mixta** es aquella en que el período comienza una ó varias cifras después de la coma; v. gr. :

0,757 08 08 08 08que se abrevia así : 0,757(08)

178. — Para saber si un quebrado se puede convertir exactamente en decimal, se descomponen los dos términos en sus factores primos, se simplifican éstos y luego se observan las siguientes indicaciones :

1ª Si el denominador no queda formado más que de los factores 2 y 5, ó alguno de ellos, el quebrado se puede convertir exactamente en decimal.

179. — En este caso el número de cifras decimales es igual al mayor exponente de 2 y 5 en el denominador. EJEMPLO :

$$\frac{90}{1200} = \frac{2 \times 3^2 \times 5}{2^4 \times 3 \times 5^2} = \frac{3}{2^3 \times 5} = 0,075.$$

2ª Si el denominador no contiene al 2 ni al 5, el quebrado es igual á una fracción periódica simple.

180. — El número de cifras del período siempre es menor que el mayor número distinto de 2 y 5. EJEMPLO :

$$\frac{6}{18} = \frac{2 \times 3}{2 \times 3^2} = \frac{1}{3} = 0,(3).$$

3ª Si además de contener al 2 y al 5, ó á alguno de ellos, contiene otro número, el quebrado es igual á una fracción periódica mixta. EJEMPLO :

$$\frac{42}{360} = \frac{2 \times 3 \times 7}{2^3 \times 3^2 \times 5} = \frac{7}{2^2 \times 3 \times 5} = 0,41(6).$$

181. — El número de cifras no periódicas es

igual al mayor exponente de 2 ó 5 en el denominador; y el número de cifras del período siempre es menor que el mayor número distinto de 2 y 5.

182. — Para convertir una decimal en quebrado común, basta darle su denominador tácito. EJEMPLO :

$$\$ 0,75 = \frac{75}{100} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \$.$$

183. — Para convertir una fracción periódica simple en quebrado común se le pone por denominador tantos **nueves** como cifras tiene el período. EJEMPLO :

$$\$ 0,(36) = \frac{36}{99} = \frac{4}{11} \$.$$

184. — Para convertir una fracción periódica mixta en quebrado común, se resta la parte no periódica de toda la cantidad, y á la diferencia se le da por denominador tantos **nueves** como cifras periódicas haya, seguidos de tantos **ceros** como sean las cifras no periódicas. EJEMPLO ¹ :

$$\$ 0,37(49) = \frac{3749 - 37}{9900} = \frac{3713}{9900} = \frac{928}{2475}.$$

Cuestionario.

¿Cómo se convierte un quebrado común en decimal ? 174. — ¿A qué se llama periodo ? 175. — ¿Qué es fracción periódica

1. Véase el segundo tomo de la Colección de Problemas de Aritmética del autor.

simple? 176. — ¿Qué es fracción periódica mixta? 177. — ¿Cómo se sabe si un quebrado común se puede convertir exactamente en decimal? 178. — ¿A qué es igual el número de cifras decimales que resultan de un quebrado que se puede convertir exactamente en decimal? 179. — ¿De cuántas cifras consta el periodo de una fracción periódica simple? 180. — ¿A qué es igual el número de cifras no periódicas y el número de cifras periódicas de una fracción periódica mixta? 181. — Cómo se convierte una fracción decimal en quebrado común? 182. — ¿Cómo se convierte una fracción periódica simple en quebrado común? 183. — ¿Cómo se convierte una fracción periódica mixta en quebrado común? 184.

Ejercicios y problemas sobre la conversión de quebrados comunes en decimales y viceversa.

140. — Convertir en fracciones decimales :

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{7}{64}.$$

141. — Convertir en decimales :

$$\frac{8}{25}, \frac{3}{6}, \frac{5}{9}, \frac{11}{12}.$$

142. — Convertir en decimales :

$$\frac{1}{32}, \frac{3}{7}, \frac{27}{471}, \frac{3}{8}.$$

143. — Convertir en quebrados comunes :

$$0,4 - 0,18 - 0,0025 - 0,75$$

144. — Convertir en quebrados comunes :

$$0,417 - 3,1416 - 0,838$$

145. — Convertir en quebrados comunes :

$$0,(3) - 0,(027) - 0,(142857) - 0,(0007)$$

146. — Convertir en quebrados comunes :

$$0,(000140) - 0,(90) - 0,(112) - 0,(3456)$$

147. — Convertir en quebrados comunes :

$$0,00(475) — 0,47(09) — 0,902(7) — 0,2(4576)$$

148. — Convertir en quebrados comunes :

$$0,31(000\ 8) — 4,75(36) — 1,01(4)$$

149. — Convertir en quebrados comunes :

$$0,000(100) — 0,0(4096) — 0,000(707).$$

DENOMINADOS

MEDIDAS DEL TIEMPO

185. — La unidad mayor es el siglo, que tiene 20 lustros ó 100 años.

El lustro tiene 5 años, el año 12 meses, el mes 30 ó 31 días, el día 24 horas, la hora 60 minutos y el minuto 60 segundos.

El año tiene 365 días, si es común y 366 si es bisieño.

SIGLOS	LUSTROS	AÑOS	MESES	SEMANAS	DÍAS	HORAS	MINUTOS
1	20	100	1200	5218	36525	876600	52596000
	1	5	60	261	1826	43824	2629440
		1	12	52	$365 \frac{1}{4}$	8766	525960
			1	$4 \frac{1}{2}$	30	720	43200
				1	7	168	10080
					1	24	1440
						1	60

186. — MEDIDA DE LA CIRCUNFERENCIA

CIRCUNFERENCIA	CUADRANTES	GRADOS	MINUTOS	SEGUNDOS
1	4	360	21600	1296000
	1	90	5400	324000
		1	60	3600
			1	60

187. — El papel se mide por *balones* que tienen 20 resmas, la resma 20 manos, la mano 5 cuadernos y el cuaderno 5 pliegos†

BALÓN	RESMA	MANOS	CUA- DERNOS	PLIEGOS
1	20	400	2000	10000
	1	20	100	500
		1	5	25
			1	5

OPERACIONES CON LOS DENOMINADOS

188. — **Para reducir un denominado de especie mayor á menor, se multiplican las unidades mayores por el número de unidades menores que contenga, se agregan las de esta especie, y así se continúa la operación hasta llegar á la de especie inferior. EJEMPLO :**

¿ Cuántos días ha vivido un niño que nació hace 4 años, 10 meses y 12 días ?

RESOLUCIÓN

$$\begin{array}{r}
 4 \text{ años} - 10 \text{ meses} - 12 \text{ días} = 1,752 \text{ días} \\
 \times 12 \text{ ms.} \\
 \hline
 48 \text{ ms.} \\
 + 10 \text{ ms.} \\
 \hline
 58 \text{ ms.} \\
 \times 30 \text{ ds.} \\
 \hline
 1740 \text{ ds.} \\
 + 12 \text{ ds.} \\
 \hline
 1752 \text{ ds.}
 \end{array}$$

189. — Para reducir un denominado de especie menor á mayor, se divide por el número de unidades menores que contenga la mayor; el cociente señalará las unidades mayores, y la resta se valúa en unidades de especie menor, continuando así la operación hasta llegar á la ínfima, ó hasta que no quedare residuo. EJEMPLO :

¿Cuántas resmas, manos, cuadernos y pliegos son 3,817 pliegos?

RESOLUCIÓN

$$\begin{array}{r|l}
 3817 & 500 \\
 \hline
 317 & 7 \text{ rms., } 12 \text{ ms., } 3 \text{ cdos., } 2 \text{ pgos.} \\
 \times 20 & \text{manos.} \\
 \hline
 6340 & \text{manos.} \\
 1340 & \\
 340 & \\
 \times 5 & \text{cuadernos.} \\
 \hline
 1700 & \text{cuadernos.} \\
 200 & \\
 \times 5 & \text{pliegos.} \\
 \hline
 1000 & \\
 000 &
 \end{array}$$

190. — **Para reducir un denominado á quebrado común, se reduce á su especie menor y se le da por denominador el número de veces que la unidad de especie menor está contenida en la de que se trata.** EJEMPLO :

Expresar en forma de quebrado de año, considerando los meses de 30 días,

9 meses — 5 días — 7 horas,

RESOLUCIÓN

$$9 \text{ ms.} - 5 \text{ ds.} - 7 \text{ hs.} = 6607 \text{ ds.} = \frac{6607}{8640} \text{ de año.}$$

191. — **Para reducir un denominado á decimal, se deja la especie mayor como entero-**

lo demás se reduce á quebrado y éste á decimal.

EJEMPLO :

Expresar en forma decimal $12^{\circ} - 14' - 15''$

RESOLUCIÓN

$$12^{\circ} - 14' - 15'' = 12^{\circ} \frac{855}{3600} = 12^{\circ},2375.$$

192. — Para reducir un quebrado común á denominador, se divide el numerador por el denominador, valuando la resta, si la hubiere, en unidades de la especie inferior inmediata, continuando así la operación hasta llegar á la ínfima.

EJEMPLO :

Reducir á denominador el quebrado $\frac{6066}{1440}$ de día.

RESOLUCIÓN

6066	1440	
306	4 ds. — 5 hs. — 6 mts.	
$\times 24$ hs.		
1224		
612		
7344 hs.		
144		
$\times 60$ ms.		
8640		
0000		

193. — Para reducir una fracción decimal á denominador, se valúa la parte decimal en

unidades de la especie inferior inmediata; si aún quedan decimales, se repite lo mismo hasta llegar á la última subdivisión ó hasta que ya no haya cifras decimales. Luego se escriben por separado, las partes enteras con sus respectivas especies, y la última con su decimal al lado, si la hay.

EJEMPLO :

Convertir en días, horas, minutos y segundos, la duración real del año que es de $365^{\text{ds}},242264$.

RESOLUCIÓN

$$\begin{array}{r}
 365^{\text{ds}},242264 \\
 \times 24 \text{ hs.} \\
 \hline
 969056 \\
 484528 \\
 \hline
 5^{\text{hs}},814336 \\
 \times 60 \text{ mts.} \\
 \hline
 48^{\text{mts}},860160 \\
 \times 60 \text{ s.} \\
 \hline
 51^{\text{s}},609600
 \end{array}$$

Por consiguiente, la duración real del año es de 365 días, 5 horas, 48 minutos, 51,6 segundos.

Cuestionario.

- ¿Cómo se reduce un denominado de especie mayor á menor?
 188. — ¿Cómo se reduce un denominado de especie menor á mayor?
 189. — ¿Cómo se reduce un denominado á quebrado común?
 190. — ¿Cómo se reduce un denominado á decimal?
 191. — ¿Cómo se reduce un quebrado común á denominado?
 192. — ¿Cómo se reduce una fracción decimal á denominado?
 193.

SUMAR DENOMINADOS

26.

194. — Para sumar denominados se escriben los sumandos, unos debajo de otros, de modo que se correspondan las unidades de una misma especie. Se empieza la operación por la columna de la derecha, llevando las unidades mayores que resulten á sumar con la siguiente columna, dejando las unidades menores en la primera, y así consecutivamente. EJEMPLO :

9	días	15	horas	49	minutos	12	segs.
0	—	3	—	56	—	32,6	—
35	—	22	—	45	—	29	—
45	días	18	horas	31	minutos	13,6	segs.

RESTAR DENOMINADOS

195. — **Para restar denominados** se coloca la cantidad menor debajo de la mayor, como en la suma, especie debajo de especie. Comenzando por la inferior, se ve cuánto le falta á cada cantidad del substraendo para ser igual á la correspondiente del minuendo; si en cualquiera de las especies, la cantidad del minuendo es menor que la del substraendo, se le agrega una unidad de la especie superior inmediata, reducida á la de que se trate, y se continúa la operación, teniendo cuidado de restituir dicha unidad en la siguiente especie del substraendo, y así se continúa la operación hasta llegar á la especie mayor. EJEMPLO :

$$\begin{array}{r} 45^{\circ} - 12' - 15'' \\ 36^{\circ} - 13' - 17'' \\ \hline 8^{\circ} - 58' - 58'' \end{array}$$

MULTIPLICAR DENOMINADOS.

196. — En la multiplicación de denominados se presentan tres casos : 1° Cuando el multiplicador es un número *abstracto*. 2° Cuando el multiplicador es *concreto* y consta de una sola especie de unidades. 3° Cuando el multiplicador es *complejo*.

197. — El primer caso se resuelve multiplicando el número abstracto por cada una de las especies del multiplicando, comenzando por la inferior; se reduce cada producto á la especie superior inmediata, se deja la resta debajo de la última especie, y el cociente se lleva á sumar con el producto de la siguiente hasta llegar á la superior, donde se escribe el producto completo.

EJEMPLO :

Multiplicar por 5 la cantidad 11 horas, 42 minutos, 17 segundos.

$$\begin{array}{r} 11 \text{ h. } 42 \text{ m. } 17 \text{ s.} \\ \times 5 \\ \hline 58 \text{ h. } 31 \text{ m. } 25 \text{ s.} \end{array}$$

PRODUCTOS PARCIALES.

$$5 \times 17 \text{ s.} = 85 \text{ s.} = 1 \text{ m. } 25 \text{ s.}$$

$$5 \times 42 \text{ m.} = 210 \text{ m. } 210 \text{ m.} + 1 \text{ m.} = 211 \text{ m.} = 3 \text{ h. } 31 \text{ m.}$$

$$5 \times 11 \text{ h.} = 55 \text{ h. } 55 \text{ h.} + 3 \text{ h.} = 58 \text{ h.}$$

198. — Para resolver el **segundo caso**, se coloca el multiplicador debajo de la especie mayor del multiplicando y se multiplica por ella, se descompone la siguiente especie en *partes alícuotas* de la unidad superior y se saca el valor de cada una de estas partes; luego se descompone la especie siguiente en *partes alícuotas* de la unidad anterior, y así sucesivamente. Se suman estos productos parciales y la suma de todos es el producto total.

EJEMPLO :

¿Cuál es el importe de 6 resmas, 9 manos, 1 cuaderno de papel, á razón de \$5 la resma?

		6 rs.-9 ms.-1 cd.
		$\times 5 \$$
6 rm. á \$ 5 la resma.	30	
9 ms. á \$ 5 — { 5 ms.	4,25	
	4 —	4,00
1 cd. á \$ 5 —	0,05	
		\$ 32,30

En el **tercer caso** se reducen el multiplicando

y multiplicador á quebrados y se hace la multiplicación de quebrado por quebrado.

DIVIDIR DENOMINADOS

199. — En la división de denominados se presentan dos casos : 1° Cuando el divisor es un número abstracto. 2° Cuando es concreto y consta de varias especies.

200. En el **primer caso** se dispone la operación como en los enteros; se divide cada especie, comenzando por la mayor, entre la cantidad del divisor, y la resta se valúa en unidades de la especie menor inmediata continuando así la división hasta llegar á la ínfima. EJEMPLO :

Repartir 47 resmas, 15 manos de papel entre cuatro imprentas.

$$\begin{array}{r|l}
 47 \text{ rs. } 15 \text{ ms.} & 4 \\
 \hline
 7 & 11 \text{ rs. } 18 \frac{3}{4} \text{ ms.} \\
 3 & \\
 \times 20 \text{ ms.} & \\
 \hline
 60 & \\
 + 15 & \\
 \hline
 75 \text{ ms.} & \\
 35 & \\
 3 &
 \end{array}$$

201. — En el **segundo caso** se reducen ambos factores á quebrados (comunes ó decimales), se hace la división de quebrado por quebrado y el cociente se reduce á denominado.

202. — *Observaciones: 1ª La especie del cociente no la determina la especie del dividendo ni la del divisor, sino la pregunta.*

2ª Por regla general, todas las operaciones de denominados pueden resolverse convirtiéndolos previamente en decimales¹.

Cuestionario.

¿Cómo se suman los denominados? 194. — ¿Cómo se restan los denominados? 195. — ¿Cómo se multiplican los denominados? 196. — ¿Cómo se dividen los denominados? 199.

1. Véase el segundo tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor.

SISTEMA MÉTRICO

SEGUNDA PARTE. — ESTUDIO DETALLADO OBSERVACIONES PRELIMINARES ¹

203. — *Sistema legal métrico decimal* es el conjunto de las unidades de pesas y medidas cuya base es el **metro**.

204. — Se le llama *legal*, porque es el que reconocen las leyes; *métrico*, por que su base es el metro, y *decimal*, porque sus unidades van aumentando ó disminuyendo de diez en diez.

205. — Por ley de 19 de Junio de 1895, desde el 16 de Septiembre de 1896, el Sistema Métrico Decimal Internacional de Pesas y Medidas, es el único legal en los Estados Unidos Mexicanos.

206. — Hay dos clases de pesas y medidas : unas llamadas *reales*, y las otras *ficticias*.

207. — *Medidas reales* son las que existen realmente para las necesidades de las ciencias y del

1. Para más pormenores véase el *Sistema métrico decimal internacional* de Pesas y Medidas del mismo autor.

comercio, y las cuales están sometidas al examen y verificación del Fiel Contraste, como el *metro*, el *litro*, el *kilogramo*, etc.

208. — *Medidas ficticias* son las que no existen en el estado de medidas materiales, y sirven únicamente de *término de comparación*, como el *metro cuadrado*, el *metro cúbico*, la *hectárea*, etc. Por medio del cálculo y no de una manera directa, se valúan las superficies y los volúmenes.

209. — Todas las medidas reales son iguales á 1 vez, 2 veces, 5 veces la *unidad principal*; á 1 vez, 2 veces, 5 veces el *Deca*; á 1 vez, 2 veces, 5 veces el *Hecto*; á 1 vez, 2 veces, 5 veces el *Kilo*.

210. — Las medidas menores que la unidad son iguales á 1 vez, 2 veces, 5 veces el *deci*; á 1 vez, 2 veces, 5 veces el *centi*.

211. — El sistema métrico se ocupa de las medidas de *longitud*, de *superficie*, de *volumen*, de *capacidad*, de *peso* y de *moneda*.

CUADRO DE LAS PESAS Y MEDIDAS MÉTRICAS

MAGNITUDES DIVERSAS POR MEDIR	MÚLTIPLOS		
	1000	100	10
Longitudes	Kilómetro	Ilm	Dm*
Superficies		Ha ó Hm ²	
Volúmenes			De
Capacidades . . .	Kl ó m ³	HI*	DI*
Pesos	Kg*	Hg*	Dg*
UNIDADES PRINCIPALES	SUBMÚLTIPLOS		
	0,1	0,01	0,001
Metro*	dm*	cm	mm
Área ó Dm ² . . .		ca ó m ²	
Est.* ó m ³	De		dm ³ ó litro
Litro* ó dm ³ . . .	dl*	cl*	
Gramo*.	dg*	cg*	mg
NOTA. — Las medidas marcadas con <i>asterisco</i> son medidas reales.			

MEDIDAS DE LONGITUD

212. — Se llama *longitud* la distancia de un punto á otro.

213. — *La unidad de longitud es el Metro.*

214. — **Metro** es una línea que mide la diez-millonésima parte del cuarto del meridiano terrestre, esto es, de la distancia del polo al Ecuador.

215. — Se llama *meridiano terrestre* toda cir-



Fig. 1. — La Tierra.

conferencia de círculo máximo que pasa por los dos polos.

El cuarto de un meridiano, ó la distancia de un polo al Ecuador terrestre, mide *diez millones de metros*, luego todo el meridiano, ó contorno de la tierra, mide *cuarenta millones de metros* (fig. 1).

216. — **El metro** sirve para medir la longitud de una pieza de género, la distancia de un punto á otro, el contorno de un árbol, la profundidad de un pozo, etc., y en general todas las líneas rectas ó curvas.

217. — El metro *se representa* por una regla de madera ó metal, igual al *patrón* que se conserva en las oficinas del Gobierno, dividida en diez partes iguales, que son *decímetros*; cada una de éstas, dividida en otras diez partes iguales, que son *centímetros*, y cada una de éstas en diez partes iguales, que son *milímetros*. Se fabrican también metros de doblar (fig. 2), de madera ó metal, y metros de cinta, encerrados en una caja redonda, llamada *roldana*.

218. — Los **múltiplos** decimales del metro son :

El <i>decámetro</i> (D^m),	que vale	10^m ;
El <i>hectómetro</i> (H^m),	—	100^m ;
El <i>kilómetro</i> (K^m),	—	1000^m ;
El <i>miriámetro</i> (M^m),	—	10000^m .

219. — Los **submúltiplos** decimales del metro son :

El *decímetro* (d^m), que vale la décima parte del metro $0^m,1$;

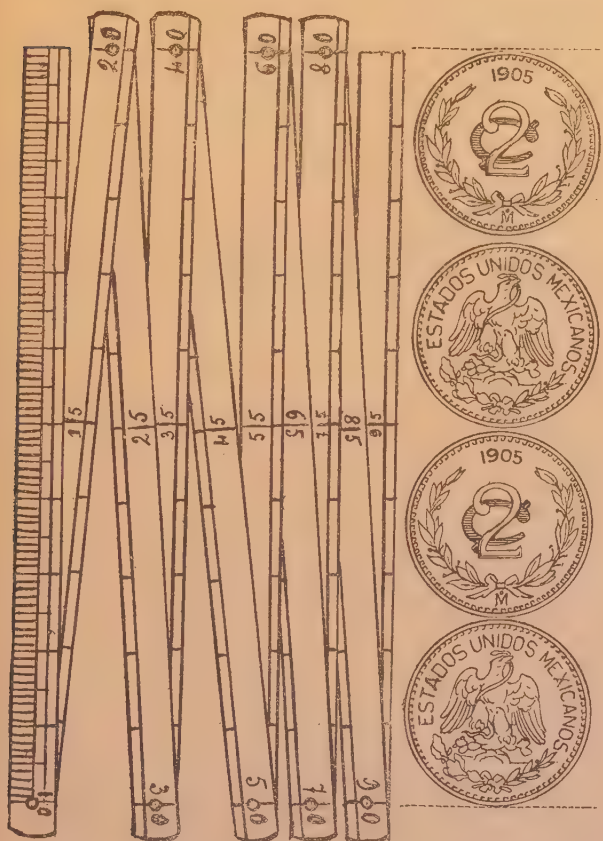


Fig. 2. — Metro de doblar (verdadero tamaño). — Cuatro monedas de á dos centavos de bronce hacen la longitud de un decímetro.

El *centímetro* (^{cm}), que vale la centésima parte del metro 0^m,01;

El *milímetro* (^{mm}), que vale la milésima parte del metro 0m,001.

El miriámetro	vale	10	kilómetros;
El kilómetro	—	10	hectómetros;
El hectómetro	—	10	decámetros;
El decámetro	—	10	metros;
El metro	—	10	decímetros;
El decímetro	—	10	centímetros;
El centímetro	—	10	milímetros.

Por consiguiente :

El milímetro	es la	10 ^a	del centímetro;
El centímetro	—		del decímetro;
El decímetro	—		del metro;
El metro	—		del decámetro;
El decámetro	—		del hectómetro;
El hectómetro	—		del kilómetro;
El kilómetro	—		del miriámetro.

220. — Las palabras *decámetro*, *hectómetro*, *kilómetro* y *miriámetro* no se emplean más que en la valuación de la distancias. Para otra clase de longitudes, se reemplazan estas palabras por sus equivalentes : *diez metros*, *cien metros*, *mil metros*, *diez mil metros*. Se dice, por ejemplo, *diez metros* de cinta, y no *un decámetro* de cinta; *cuarenta metros* de género, y no *cuatro decámetros* de género; *cien metros* de paño, y no *un hectómetro* de paño.

221. **El Decámetro.** — La unidad de longitud en la agrimensura es el *decametro* ó cadena métrica.

222. — *El Decámetro, ó cadena métrica*, es una cinta encerada, ó bien una cadena de acero de diez metros de longitud (fig. 3).

223. — Cuando se toma por unidad el decámetro, la primera cifra después de la coma representa metros, la segunda decímetros, la tercera centímetros. Así :

$9^{\text{Dm}},5$ se lee 9 Dm, 5 metros

$8^{\text{Dm}},47$ — 8 Dm, 4 m, 7 dm

ó bien 8 Dm, 47 dm.

224. — **Medidas itinerarias** son las que sirven para medir la longitud de las calzadas, canales, vías férreas.

225. — Las medidas itinerarias son el *miriámetro*, el *kilómetro*, y el *hectómetro*.

226. — La unidad principal de las medidas itinerarias es el *kilómetro*, que vale 1 000 metros.

227. — Cuando se toma por unidad el *kilómetro*, la primera cifra después de la coma representa hectómetros, la segunda decámetros y la tercera metros. Así :



Fig. 3.

4^{Km}, 3 se lee 4 Km 3 Hm.

2^{Km}, 75 — 2 Km 75 Dm.

4^{Km}, 190 — 4 Km 190 metros.

228. — Para tener una idea de la longitud del hectómetro y del kilómetro, conviene saber que, á paso ordinario, el hectómetro se recorre en un minuto y tercio y el kilómetro en 13 minutos.

229. **Medidas astronómicas.** — Para apreciar las distancias astronómicas, tales como la distancia de la Tierra al Sol ó á una estrella fija, se hace uso del kilómetro; pero con más frecuencia se toma por unidad el radio terrestre, cuya longitud media es de 6366^{Km}, 666.

230. — **El decímetro y doble decímetro** se usan para medir *longitudes pequeñas* como el largo de un libro, de una hoja de papel, etc.

231. **El centímetro tomado por unidad.** — En los trabajos de construcción, se toma frecuentemente el *centímetro* por unidad.

Así, un carpintero dirá que una viga tiene 140 de longitud, se sobreentiende *centímetros*, es decir, 1^m, 40.

Un pintor dirá que un vidrio mide 45 por 56, es decir, 45 *centímetros* de ancho por 56 centímetros de largo, que se escribirá 0^m, 45 por 0^m, 56.

232. **El milímetro tomado por unidad.** — Cuando se trata de medir pequeñas dimensiones, como el grueso de una tabla, de una placa de mármol ó de vidrio, etc., se toma el *milímetro* por unidad.

Así se dice que una tabla es de 15 *milímetros* ó de 35 *milímetros* de grueso.

233. — Las diferentes unidades de longitud, es decir, el metro, sus múltiplos y submúltiplos, siendo de *diez* en *diez* veces mayores ó menores, están sujetas á las reglas de la numeración decimal.

De ahí resulta que un número que exprese metros se lee y escribe como número decimal ordinario.

EJEMPLOS. — 1° Sea por leer el número **43^m,625**.

Se enuncia la parte *entera* **43** metros, luego la parte decimal, **625**, como si fuera número entero; pero como esta parte decimal representa milésimos de metro, ó milímetros, se agrega la palabra *milímetros* después de **625**. De manera que el número propuesto se lee :

43 metros 625 milímetros.

Se puede también enunciar :

43 metros 625 milésimos.

2° Escribir el número **3** metros **65** milímetros. Se coloca el 5 en el lugar de las milésimas, y se tiene :

3^m,065.

234. — *Para reducir unidades de longitud de especie mayor á menor y viceversa, basta correr la coma respectivamente, hacia la derecha ó hacia*

la izquierda, *un lugar* por cada unidad á que se quiera reducir.

EJEMPLO. — 1º Convertir en kilómetros el número

4258^m, 3.

Retrocedemos la coma *tres* lugares hacia la izquierda para colocarla á la derecha del 4, que expresa kilómetros, y se tiene el número

4^{Km}, 2583.

En efecto, siendo los kilómetros **1000** veces mayores que los metros, el mismo número contendrá **1000** veces menos kilómetros; luego habrá que dividir por **1000** el número dado en metros, es decir, correr la coma *tres* lugares hacia la izquierda.

2º Convertir en hectómetro el número

8^m, 5.

Corremos la coma *dos* lugares hacia la izquierda, para colocarla á la derecha de la cifra de los hectómetros; pero como no hay cifras que representen los decámetros y los hectómetros, las reemplazamos con ceros, y resulta :

0^{Hm}, 085.

235. — *Las medidas reales de longitud son ocho, á saber :*

1° *Dos medidas mayores* : el decámetro y el doble decámetro, es decir : 10 y 20 metros.

2° *Tres medidas medianas* : el metro, el doble metro y el demidecámetro, es decir : 1, 2 y 5 metros.

3° *Tres medidas menores* : el decímetro, el doble decímetro y el demimetro, es decir : 1, 2 y 5 decímetros.

MEDIDA DE LAS LONGITUDES Y DE LAS CIRCUNFERENCIAS

236. — Se mide una longitud aplicando sobre ella la longitud tomada como *unidad*.

237. — *El perímetro* ó contorno de un polígono es igual á la suma de las longitudes de los lados que lo forman.

238. — *La longitud de una circunferencia de círculo* es igual á dos veces el radio, multiplicado por la *razón de la circunferencia al diámetro*, lo que equivale á emplear la fórmula siguiente : $C = 2\pi r$, en la que C significa la circunferencia, r el radio y π (pronúnciese *pi*) la razón de la circunferencia al diámetro.

239. — El *valor numérico de π* encontrado por

Arquímedes, es :

$$\pi = \frac{22}{7}$$

el encontrado por Pedro Metius, es :

$$\pi = \frac{355}{113}$$

pero el usado con más frecuencia es :

$$\pi = 3,1415926.$$

240. — Cuando conociendo la circunferencia se quiere encontrar el radio, se emplea la fórmula¹ :

$$r = \frac{C}{2\pi}$$

Cuestionario.

¿Qué es sistema legal métrico decimal? 203. — ¿Por qué se le llama legal, por qué métrico y por qué decimal? 204. — ¿Qué ley puso en vigor el sistema métrico decimal? 205. — ¿Cuántas clases hay de pesas y medidas? 206. — ¿Qué son medidas reales? 207. — ¿Qué son medidas ficticias? 208. — ¿Qué regla se sigue para la clasificación de las medidas reales mayores que la unidad? 209. — ¿Qué regla se sigue para la clasificación de las unidades menores que la unidad? 210. — ¿De qué clase de medidas se ocupa el sistema métrico? 211. — ¿A qué se llama longitud? 212. — ¿Cuál es la unidad de longitud? 213. — ¿Qué es metro? 214. — ¿A qué se llama meridiano? 215. — ¿Cuántos metros mide el meridiano terrestre? 215. — ¿Para qué sirve el metro? 216. — ¿Cómo se representa el metro? 217. — ¿Cuáles son los múltiplos del metro? 218. — ¿Cuáles son los submúltiplos del metro? 219. — ¿Cuándo se emplean las palabras decámetro,

1. Véase el 2º tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor.

hectómetro, kilómetro y miriámetro? 220. — ¿Cuál es la unidad de longitud en la agrimensura? 221. — ¿Cómo se representa el decámetro? 222. — Tomando como unidad el decámetro, ¿qué nombre reciben las demás cifras? 223. — ¿Qué son medidas itinerarias? 224. — ¿Cuáles son las medidas itinerarias? 225. — ¿Cuál es la unidad principal de las medidas itinerarias? 226. — Tomando como unidad el kilómetro, ¿qué nombre reciben las demás cifras? 227. — ¿En qué tiempo se recorren á paso ordinario el hectómetro y el kilómetro? 228. — ¿Cuáles son las medidas astronómicas? 229. — ¿Para qué sirven el decímetro y el doble decímetro? 230. — ¿Cuándo se toma por unidad el centímetro? 231. — ¿Cuándo se toma por unidad el milímetro? 232. — ¿Cómo se leen y escriben las diferentes unidades de longitud? 233. — ¿Cómo se reducen unidades de longitud de especie mayor á menor y viceversa? 234. — ¿Cuántas son las medidas reales de longitud? 235. — ¿Cómo se mide una longitud? 236. — ¿Qué cosa es perímetro? 237. — ¿A qué es igual la longitud de una circunferencia? 238. — ¿Cuál es el valor numérico de la razón de la circunferencia al diámetro? 239. — ¿Cómo se encuentra el radio de una circunferencia? 240.

MEDIDAS DE SUPERFICIE

241. — *Superficie* es la cara ó faz de todo cuerpo.

242. — La unidad de superficie es el metro cuadrado (m^2).

243. — **Metro cuadrado** es un cuadrado que tiene un metro de longitud por cada lado.

244. — El metro cuadrado sirve para medir *superficies medianas*, como la de una sala, de un patio, de una pared, etc.

245. — Los **múltiplos y submúltiplos** del metro cuadrado tienen los siguientes valores :

El Dm^2 es un cuadrado de	10^m por lado.	
El Hm^2	—	100^m —
El Km^2	—	1000^m —
El Mm^2	—	10000^m —
El dm^2	—	$0^m,1$ —
El cm^2	—	$0^m,01$ —
El mm^2	—	$0^m,001$ —

246. **Numeración centesimal de las superficies.** — Las unidades de superficie son de *cien*

en *cien* veces mayores ó menores, es decir que :

El Mm^2 tiene $100 Km^2$.

El Km^2 — $100 Hm^2$.

El Hm^2 — $100 Dm^2$.

El Dm^2 — $100 m^2$.

El m^2 — $100 dm^2$.

El dm^2 — $100 cm^2$.

El cm^2 — $100 mm^2$.

Para probarlo, sea el cuadrado ABCD (fig. 4), que supon-

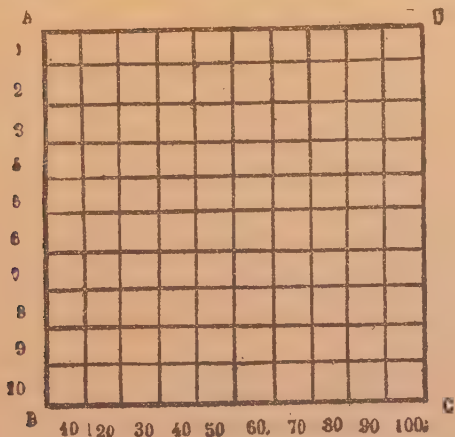


Fig. 4.

dremos igual á un metro cuadrado. Cada uno de sus lados tendrá un metro de largo.

Dividiendo el lado AD en diez partes iguales, es decir en decímetros, y por cada uno de los puntos de división trazando paralelas al lado AB, resultan diez rectángulos de 1 metro de largo por 1 decímetro de ancho.

Dividiendo del mismo modo el lado AB en diez partes iguales, es decir, en diez decímetros, y por cada uno de los puntos de división trazando paralelas al lado AD, las intersecciones de estas líneas con las primeras forman cien cuadrados de 1 decímetro de longitud por cada lado, es decir, 100 decímetros cuadrados. Así, *el metro cuadrado tiene 100 decímetros cuadrados.*

Del mismo modo se demostraría que un decímetro cuadrado tiene 100 centímetros cuadrados, que un centímetro cuadrado tiene 100 milímetros cuadrados, que un decámetro cuadrado tiene 100 metros cuadrados, etc.

De ahí se infiere que un metro cuadrado vale 100 veces 100 ó 10000 centímetros cuadrados, y 100 veces 10000 ó un millón de milímetros cuadrados; y también que un metro cuadrado es la centésima parte de un decámetro cuadrado, la diezmilésima parte de un hectómetro cuadrado, etc.

247. — Por lo tanto, las divisiones del metro cuadrado son *centesimales*, en vez de ser *decimales*, como las medidas de longitud. En otros términos, las fracciones del metro cuadrado deben estar agrupadas de *dos en dos* cifras, de suerte que se necesitan, después de los metros cuadrados :

2 *decimales* para expresar dm^2 .

4 — — — cm^2 .

6 — — — mm^2 .

248. — De lo que antecede resulta que :

El mm^2 es la *centésima* parte del cm^2 .

El cm^2 — — — dm^2 .

El dm^2 — — — m^2 .

El m^2 — — — Dm^2 .

El Dm^2 — — — Hm^2 .

El Hm^2 es la *centésima* parte del Km^2 .

El Km^2 — — — — — Mm^2 .

249. — Como las unidades de superficie son de 100 en 100 veces mayores, resulta que :

El Dm^2 vale $100 m^2$.

El Hm^2 vale $100 \times 100 = 10000 m^2$.

El Km^2 vale $100 \times 100 \times 100 = 1000000 m^2$.

El Mm^2 vale

$100 \times 100 \times 100 \times 100 = 100000000 m^2$.

250. — Por consiguiente :

El m^2 es la *centésima* parte del Dm^2 .

ó la *diezmilésima* parte del Hm^2 ,

ó la *millonésima* parte del Km^2 ,

ó la *cienmillonésima* parte del Mm^2 .

251. — No debe confundirse el *décimo* de metro cuadrado con el *decímetro cuadrado*; el *centésimo* de metro cuadrado con el *centímetro cuadrado*, ni el *milésimo* de metro cuadrado con el *milímetro cuadrado*.

252. — El *décimo de metro cuadrado* es la *décima* parte del metro cuadrado ($100 dm^2$), mientras que el *decímetro cuadrado* es la *centésima* parte.

253. — El *centésimo de metro cuadrado* es la *centésima* parte del metro cuadrado ($1 dm^2$), mientras que el *centímetro cuadrado* es la *diezmilésima* parte.

254. — El *milésimo de metro cuadrado* es la *milésima* parte del metro cuadrado (10 cm^2), mientras que el *milímetro cuadrado* es la *millonésima* parte.

255. — Para leer un número que exprese superficies, se lee primero la parte *entera*, luego se divide mentalmente la parte *decimal* en **secciones de dos cifras**, á partir de la coma, y se lee cada una de estas secciones, sucesivamente, dándole el nombre de las unidades que represente.

Si la última sección no tiene mas que una cifra, se completa con un **cero**.

EJEMPLOS. — 1° Leer el número **23^{m2},425679**.

Se dirá :

23 metros cuadrados, **42** decímetros cuadrados, **56** centímetros cuadrados, **79** milímetros cuadrados.

Se puede también convertir toda la parte decimal en milímetros cuadrados, y decir : **23** metros cuadrados, **425679** milímetros cuadrados.

2° Leer los números

2^{m2},5.

0^{m2},003.

Se dirá : **2** metros cuadrados, **50** decímetros cuadrados.

0 metros cuadrados, **30** centímetros cuadrados (**30** y no **3**).

Así el número

25,17 se lee : **25** áreas, **17** centiáreas.

8^{ha}, 324 se lee : **8** hectáreas, **32** áreas, **40** centiáreas.

256. — Para escribir un número que exprese superficies, se escribe primero la parte entera, luego la coma, luego sucesivamente las unidades decimales, empleando **dos cifras** para cada una de ellas.

Así : **3** metros cuadrados, **27** decímetros cuadrados, **45** centímetros cuadrados, **61** milímetros cuadrados, se escriben :

3^{m²}, 274561.

4 metros cuadrados, **8** decímetros cuadrados, **5** centímetros cuadrados, se escriben :

4^{m²}, 0805.

2 metros cuadrados, **173** centímetros cuadrados, se escriben :

2^{m²}, 0173.

43 centímetros cuadrados, se escriben :

0^{m²}, 0043.

El número

4 hectáreas, **25** áreas, **3** centiáreas, se escriben :

4^{Ha}, 2503.

0 hectáreas, **4** áreas, se escribe :

0^{Ha}, 04.

257. — Para reducir unidades de *superficie* de especie mayor á menor y viceversa, basta correr la coma respectivamente hacia la derecha ó hacia la izquierda, *dos lugares* por cada unidad á que se quiera reducir :

EJEMPLO :

7^{Ha},5 convertidas en **°**, valen **7500°**.

439°, convertidas en **Ha**, valen **0^{Ha},0439**.

258. — Para convertir medidas *agrarias* en medidas de *superficie* y recíprocamente, basta recordar que las *hectáreas* corresponden á los *hectómetros cuadrados*, las *centiáreas* á los *metros cuadrados*.

Así :

	4^{Ha}	2°	35° ,
equivalen á	4^{Hm²}	2^{Dm²}	35^{m²} .

259. — **Pequeñas unidades de superficie.** Para medir superficies pequeñas como las hojas de papel, de cartón, de metal; un grabado, un dibujo, un ladrillo, una teja, una pizarra, etc., se toma por unidad el *decímetro cuadrado*, el *centímetro cuadrado*, el *milímetro cuadrado*.

260. — Las **medidas agrarias** son las medidas de superficie aplicadas á la superficie de los campos, bosques, praderas, etc.

261. — La unidad principal de las medidas agrarias es el **decámetro cuadrado**, que entonces recibe el nombre de **ÁREA**.

262. — El área no tiene más que *un* múltiplo :

La **hectárea** (H^a), que vale *cien áreas*, ó *cien decámetros cuadrados*, y que, por consiguiente, no es otra cosa que el *hectómetro cuadrado*.

263. — El área no tiene más que *un* submúltiplo :

La **centiárea** (ca), que es la *centésima* parte del área, ó la centésima parte del decámetro cuadrado, y que, por consiguiente, no es otra cosa que el **metro cuadrado**.

Lo que se puede resumir en el cuadro siguiente :

$$Ha = Hm^2 = 10000m^2;$$

$$a = Dm^2 = 100m^2;$$

$$ca = m^2 = 1m^2;$$

264. — Merced á la ausencia de unidad decimal entre el área y la hectárea (*pues no hay decárea*), y también entre el área y la centiárea (*pues no hay deciárea*), las tres unidades de medidas agrarias son de *cien en cien* veces menores. Están por consiguiente sujetas á la numeración *centesimal* de las otras unidades de superficie, de las cuales no desfieren sino en el nombre.

265. — **Para medir las grandes superficies**, como la de un Estado, de un territorio, de una de las cinco partes del mundo, de la tierra entera, se toma el *kilómetro cuadrado* por unidad. Así se dice que la República Mexicana tiene una superficie de 1987083 kilómetros cuadrados¹.

1. Véase el segundo tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor.

CÁLCULO DE LAS SUPERFICIES

266. — No hay medida real de superficie, así es que las superficies se obtienen por medio del cálculo y no de una manera directa.

267. — La geometría nos enseña á calcular una superficie por medio de simples líneas rectas.

268. — Veremos la manera de determinar la superficie de las figuras siguientes :

269. — TRIÁNGULO : Su superficie es igual á la mitad del producto de su base por su altura.

$$\text{Fórmula} \dots\dots\dots S = \frac{B \times A}{2}$$

270. — PARALELOGRAMO : Producto de su base por su altura.

$$\text{Fórmula} \dots\dots\dots S = B \times A$$

271. — CUADRADO : Segunda potencia de uno de sus lados.

$$\text{Fórmula} \dots\dots\dots S = A^2$$

272. — TRAPECIO : Semisuma de los lados paralelos multiplicada por la altura.

$$\text{Fórmula} \dots\dots\dots S = \frac{L + l}{2} \times H.$$

273. — POLÍGONO REGULAR : Mitad del producto de su perímetro por el radio recto.

$$\text{Fórmula} \dots\dots\dots S = \frac{1}{2} p \times r.$$

274. — POLÍGONO IRREGULAR : Suma de las áreas de los triángulos que lo forman.

275. — CÍRCULO : Cuadrado del radio multiplicado por la razón de la circunferencia al diámetro.

$$\text{Fórmula} S = \pi \times r^2.$$

276. — ELIPSE : Cuarta parte del producto de los ejes por la razón de la circunferencia al diámetro.

$$\text{Fórmula} S = \left(\frac{E \times e}{4} \right) \times \pi.$$

277. — ESFERA : La superficie de uno de sus círculos máximos multiplicada por 4.

$$\text{Fórmula} S = 4 \times \pi R^2.$$

278. — PRISMA RECTO : Su área lateral es igual al producto del perímetro de la base, por la altura.

$$\text{Fórmula} S = P \times A.$$

279. — CILINDRO : Su área lateral es igual al producto de su altura por la circunferencia de la base.

$$\text{Fórmula} S = 2 \pi r h.$$

280. — PIRÁMIDE REGULAR : Su área lateral es igual á la mitad del producto del perímetro de la base por la altura de uno de los triángulos.

$$\text{Fórmula} S = \frac{1}{2} P \times A.$$

281. — CONO RECTO : Su área lateral es igual á la

mitad del producto de su generatriz por la circunferencia de la base.

$$\text{Fórmula } S = \frac{1}{2} G \times C.$$

282. — TROZO DE CONO : Su área lateral es igual á la mitad del producto de la suma de las circunferencias de las bases por el lado del trozo¹.

$$\text{Fórmula } S = \frac{(C + c) \times l}{2}.$$

Cuestionario.

¿Qué es superficie? 241. — ¿Cuál es la unidad de superficie? 242. — ¿Qué es metro cuadrado? 243. — ¿Para qué sirve el metro cuadrado? 244. — ¿Cuáles son los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado? 245. — ¿Cómo van aumentando ó disminuyendo las unidades de superficie? 246. — ¿Por qué un metro cuadrado tiene 100 decímetros cuadrados? 246. — ¿Cuántos centímetros cuadrados y cuántos milímetros cuadrados tiene el metro cuadrado? 246. — ¿Qué lugar ocupan los decímetros cuadrados, los centímetros cuadrados y los milímetros cuadrados, después de la coma? 247. — ¿Cuántos metros cuadrados tienen el decámetro cuadrado, el hectómetro cuadrado, etc? 249. — ¿Es lo mismo un décimo de metro cuadrado que un decímetro cuadrado? 251. — ¿Cómo se lee un número que exprese superficies? 255. — ¿Cómo se escribe un número que exprese superficies? 256. — ¿Cómo se reducen unidades de superficie de especie mayor á menor ó viceversa? 257. — ¿Cómo se convierten medidas agrarias en medidas de superficie y recíprocamente? 258. — ¿Para qué se usan el decímetro cuadrado, el centímetro cuadrado y el milímetro cuadrado? 259. — ¿Qué son medidas agrarias? 260. — ¿Cuál es la unidad para las medidas agrarias? 261. — ¿Cuáles son los múltiplos y submúltiplos de la área? 262, 263. — ¿Cuáles la unidad de medida para las grandes superficies topográficas? 265. — ¿Hay medidas

1. Véase el segundo tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor.

reales que representen las unidades de superficie? 266. —
¿ Cómo se determina la superficie de un triángulo? 269 — la de
un paralelogramo? 270 — la de un cuadrado? 271 — la de un
trapezio? 272 — la de un polígono regular? 273 — la de un polí-
gono irregular? 274 — la de un círculo? 275 — la de una
elipse? 276. — ¿ Cómo se determina la superficie de una esfera?
277. — la de un prisma recto? 278 — la de un cilindro? 279 — la
de una pirámide regular? 280. — la de un cono recto? 281. — la
de un trozo de cono? 282.

MEDIDAS DE VOLUMEN

283. — **Volumen** es el lugar que ocupa un cuerpo en el espacio.

284. — La unidad del volumen es el *metro cúbico* (m^3).

Se llama cubo un sólido terminado por seis caras cuadradas como un dado de jugar (fig. 5).

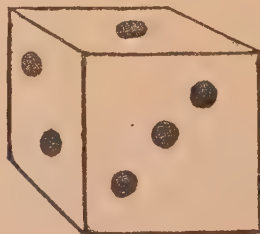


Fig. 5.

285. — **Metro cúbico** es un cubo cuyas caras son metros cuadrados.

286. — El **metro cúbico** sirve para valuar el volumen de una piedra de construcción, de una viga, de una pared; la cantidad de agua contenida en un estanque, la capacidad de un foso, etc.

287. — Los **múltiplos** del metro cúbico no reciben nombre particular. No se dice : un decámetro cúbico, un hectómetro cúbico, etc., sino sencillamente : diez, cien, mil, diez mil metros cúbicos.

288. — Los **submúltiplos** del metro cúbico, son : el *decímetro cúbico*, el *centímetro cúbico* y el *milímetro cúbico*.

El **decímetro cúbico** (dm^3) es un cubo que tiene un decímetro por cada lado, ó cuyas caras son decímetros cuadrados.

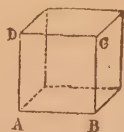


Fig. 6. — Centímetro cúbico (verdadero tamaño).

El **centímetro cúbico** (cm^3) es un cubo que tiene un centímetro por cada lado (fig. 6), ó cuyas caras son centímetros cuadrados.

El **milímetro cúbico** (mm^3) sería un cubo de un milímetro por lado, ó cuyas caras fueran de un milímetro cuadrado cada una, si pudiese tener existencia real un volumen tan pequeño.

289. — Las unidades de volumen son de mil en mil veces mayores ó menores.

Para probarlo, sea el cuadrado ABCD (fig. 7), que supondremos igual á un metro cuadrado.

Podemos descomponer este metro cuadrado en decímetros cuadrados.

Sobre cada uno de estos decímetros cuadrados podemos colocar un decímetro cúbico; obtendremos así una primera capa que tendrá un decímetro de altura y que se compondrá de 100 decímetros cúbicos.

Si sobreponemos 10 capas paralelas, tendremos 10 veces

100 ó 1000 decímetros cúbicos, y el volumen que habremos

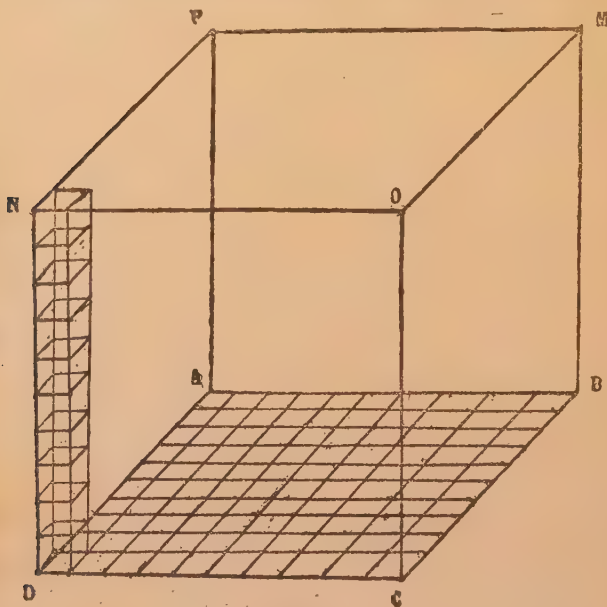


Fig. 7.

formado tendrá un metro por cada lado, luego será un metro cúbico.

Luego el metro cúbico vale *mil* decímetros cúbicos.

Del mismo modo se demostraría que el decímetro cúbico tiene 1000 centímetros cúbicos, y que el centímetro cúbico tiene teóricamente 1000 milímetros cúbicos.

De ahí se infiere que un metro cúbico tiene 1000 veces 1000 ó un millón de centímetros cúbicos.

290. — Se ve que las divisiones del metro cúbico son *milesimales* en vez de ser *centesimales* como en el metro cuadrado, y *decimales* como en el metro lineal. En otros términos, las fracciones del metro cúbico deben estar agrupadas de tres en tres cifras, de suerte que se necesitan después de los metros cúbicos :

3	<i>decimales</i>	para expresar	dm^3
6	—	—	cm^3
9	—	—	mm^3 .

291. — Puesto que las unidades de volumen son de mil en mil veces menores :

El m^3 vale $1000\ dm^3$

$$\text{ó } 1000 \times 1000 = 1000000\ cm^3$$

$$\text{ó } 1000 \times 1000000 = 1000000000\ mm^3.$$

Por consiguiente :

El dm^3 es la milésima parte del m^3

El cm^3 — millonésima —

El mm^3 — billonésima —

292. — No debe confundirse el *décimo de metro cúbico* con el *decímetro cúbico*, el *centésimo de metro cúbico* con el *centímetro cúbico*, ni el *milésimo de metro cúbico* con el *milímetro cúbico*.

El *décimo de metro cúbico* es la *décima* parte del metro cúbico, mientras que el *decímetro cúbico* es la *milésima* parte del metro cúbico.

293. — **Para leer** un número que exprese *volúmenes*, se lee la parte entera, luego se divide mentalmente la parte decimal en secciones de **tres** cifras, á partir de la coma, y se lee cada una de estas secciones sucesivamente dándole el nombre de las unidades que represente.

Si la última sección no tiene más que *una* ó *dos* cifras, se completa con *dos* **ceros** ó con *un* **cero**.

EJEMPLOS. — Leer el número

18^m,532479508,

se dirá :

18 metros cúbicos, **532** decímetros cúbicos, **479** centímetros cúbicos, **508** milímetros cúbicos.

294. **OBSERVACIÓN.** — Tal número no se encuentra nunca en la práctica. Se hace abstracción siempre de los milímetros cúbicos y aun de los centímetros cúbicos, cuando se trata de volúmenes que contengan metros cúbicos.

2º Leer los números

3^m,2574

0^m,030055.

Se dirá :

3 metros cúbicos, **257** decímetros cúbicos, **400** centímetros cúbicos.

30 decímetros cúbicos, **55** centímetros cúbicos.

295. — **Para escribir** un número que exprese *volúmenes*, se escribe primero la parte entera, luego la coma, luego sucesivamente las unidades

decimales, empleando **tres** cifras para cada una de ellas.

Así : **8** metros cúbicos, **275** decímetros cúbicos, **340** centímetros cúbicos, se escriben : **3^{m³},275340**.

8 metros cúbicos **47** decímetros cúbicos, **5** centímetros cúbicos, se escriben :

8^{m³},047005.

4 metros cúbicos, **567** centímetros cúbicos se escriben : **4^{m³},000567**.

24 decímetros cúbicos se escriben :

0^{m³},024.

296. — *Para reducir unidades de volumen de especie mayor á menor y viceversa, basta correr la coma respectivamente, hacia la derecha ó hacia la izquierda, tres lugares por cada unidad á que se quiera reducir.*

EJEMPLO. — Convertir en centímetros cúbicos el número :

8^{m³},5243719.

El metro cúbico vale un millón de centímetros cúbicos, luego este número contendrá un millón de veces más centímetros cúbicos que metros cúbicos. Multiplicamos, pues, por **1000000**, corriendo la coma **6** lugares hacia la derecha, es decir, poniéndola á la derecha de la cifra que

expresa centímetros cúbicos, y tendremos el número

$$8524371^{\text{cm}^3},9$$

Del mismo modo $43^{\text{cm}^3},5$ convertidos en metros cúbicos, valen $0^{\text{m}^3},0000435$.

297. — El metro cúbico, cuando sirve para medir leña ó maderas de construcción recibe el nombre **Esterio**, usándose, además, el *demidecasterio* y el *doble esterio*.

El **esterio** (fig. 8) es una especie de *bastidor*

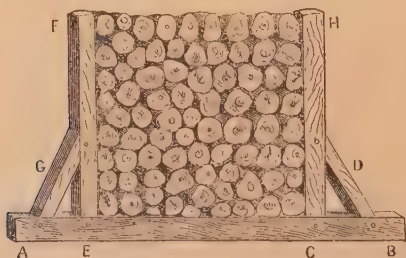


Fig. 8. — Esterio.

compuesto de una viga AB., de dos *pies derechos* EF. y CH., y de dos *puntales* G y D., destinados á sostener los pies derechos. La madera por medir se coloca entre los pies derechos.

298. — El esterio tiene un *múltiplo*, que es el **decasterio**, que vale 10 esterios ó 10 metros cúbicos, y un *submúltiplo*, que es el **decisterio** y que vale la décima parte del esterio ó del metro cúbico.

CÁLCULO DE LOS VOLÚMENES

299. — Los volúmenes se calculan de una manera indirecta por medio de simples líneas rectas.

Veremos la manera de determinar el volumen de los siguientes cuerpos :

300. — PRISMA Y PARALELIPÍEDO : Su volumen es igual al producto de la superficie de su base por su altura.

301. — CUBO : Tercera potencia de uno de sus lados.

302. — PIRÁMIDE : Tiene por volumen la tercera parte del producto de la superficie de su base por su altura.

303. — CILINDRO : Superficie del círculo de la base por la altura... $V = \pi r^2 h$.

304. — CONO : Tercera parte de la superficie del círculo de la base por la altura.... $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

305. ESFERA : Su volumen es igual á $\frac{4}{3}$ del producto de la razón de la circunferencia al diámetro multiplicada por el cubo del radio.... $V = \frac{4}{3} \pi \times R^3$.

306. — POLIEDRO REGULAR : Su volumen se obtiene multiplicando la superficie de una de sus caras por el número de ellas, y este producto por el tercio de la apotema del poliedro.

307. — Para determinar el volumen interior de UN BARRIL se emplea la fórmula siguiente, en la que D representa el diámetro mayor del barril,

el diámetro de los fondos, L el largo interior del barril y π la razón de la circunferencia al diámetro :

$$V = \pi \left(\frac{2D + d}{6} \right)^2 \times L.$$

308. — El volumen de los cuerpos puede también determinarse *dividiendo su peso por su densidad*, lo que equivale á emplear la fórmula siguiente ¹ :

$$V = \frac{P}{D}.$$

Cuestionario.

¿Qué es volumen? 283. — ¿Cuál es la unidad de volumen? 284. — ¿Qué es metro cúbico? 285. — ¿Para qué sirve el metro cúbico? 286. — ¿Cuáles son los múltiplos del metro cúbico? 287. — ¿Cuáles son los submúltiplos del metro cúbico? 288. — ¿Cómo aumentan ó disminuyen las unidades de volumen? 289. — ¿Con cuántas cifras se expresan los decímetros cúbicos, los centímetros cúbicos y los milímetros cúbicos? 290. — ¿Cuántos decímetros cúbicos, centímetros cúbicos y milímetros cúbicos tiene el metro cúbico? 291. — ¿Qué diferencia hay entre el décimo de metro cúbico y el decímetro cúbico? 292. — ¿Cómo se lee un número que exprese volúmenes? 293. — ¿Cómo se escribe un número que exprese volúmenes? 295. — ¿Cómo se reducen unidades de volumen de especie mayor á menor y viceversa? 296. — ¿Qué es esterior? 297. — ¿Cuáles son los múltiplos y submúltiplos del esterior? 298. — ¿De qué manera se calculan los volúmenes de los cuerpos? 299. — ¿A qué es igual el volumen de un prisma — de un cubo — de una pirámide — de un cilindro — de un cono — de una esfera? — ¿Cómo se obtiene el volumen de un poliedro regular? 306. — ¿Cómo se determina el volumen interior de un barril? 307. — ¿Cómo se puede encontrar el volumen de un cuerpo cuando se conocen su peso y su densidad? 308.

1. Véase el 2º tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor.

DENSIDADES DE ALGUNOS CUERPOS SÓLIDOS, LÍQUIDOS Y GASEOSOS

Sólidos.

Acero.	7,82	Fierro fundido. . .	7,20
Alcanfor	0,99	Fresno	0,88
Almidón	1,55	Granito.	2,77
Arena seca	1,43	Ladrillo.	2,17
Idem húmeda.	1,86	Latón.	8,43
Azúcar	1,60	Marfil.	1,92
Azufre	2,07	Mármol.	2,71
Barro.	1,73	Níckel	8,28
Cal apagada.	1,43	Oro.	19,26
Cal viva.	0,86	Piedra común. . .	2,20
Cedro.	0,65	Plata.	10,47
Cobre.	8,85	Platino	22,00
Corcho	0,24	Plomo	11,35
Cristal	3,33	Sal de mar.	2,20
Ebano	1,33	Salitre	1,93
Encino	1,05	Tierra vegetal. . .	1,28
Estaño	7,30	Vidrio.	2,55
Fierro forjado. . . .	7,78	Zinc	7,19

Líquidos.

Aceite de oliva. . . .	0,92	Cerveza.	1,03
Aceite de linaza. . .	0,94	Cloroformio	1,52
Aceite de ricino. . .	0,97	Eter sulfúrico. . .	0,74
Acido sulfúrico . . .	1,84	Leche.	1,03
Acido nítrico	1,52	Mercurio	13,59
Agua destilada. . . .	1,00	Petróleo.	0,84
Agua de mar	1,03	Pulque	0,875
Agua de pozo.	1,003	Sangre	1,05
Aguardiente á 18°. .	0,95	Vino Burdeos	0,994
Alcohol absoluto. . .	0,80	Vino de Borgoña. . .	0,991
Amoníaco líquido . .	0,87	Vino de Málaga . . .	1,022

Gaseosos.

Aire común.	0,0013	Hidrógeno.	0,00009
Acido carbónico. . .	0,002	Oxígeno.	0,0014
Gas de alumbrado. . .	0,090		

MEDIDAS DE CAPACIDAD

309. — Se llama **capacidad** el *volumen interior* de un cuerpo hueco; por consiguiente las medidas de capacidad son medidas de volumen.

310. — La unidad principal de capacidad es el **decímetro cúbico**, que en este caso recibe el nombre de **LITRO**.

311. — **El litro** sirve para medir líquidos, como el agua, el vino, el alcohol, la leche, etc., y para medir áridos ó cosas secas, como el maíz, el trigo, la cebada, etc.

312. — Los múltiplos del litro son :

El *decalitro* ^(Dl), que vale **10¹**

El *hectolitro* ^(Hl), — **100¹**.

La palabra *kilolitro* no es usada.

313. — Los submúltiplos del litro son :

El *decilitro*, que vale la décima parte del litro . . 0¹/₁₀.

El *centilitro*, que vale la centésima parte del litro. 0¹/₁₀₀.

El *mililitro*, que vale la milésima parte del litro. . 0¹/₁₀₀₀.

314. — Siendo las diferentes unidades de capa-

cidad de *diez en diez* veces mayores ó menores, como las unidades de *longitud*, se leen y escriben de la misma manera.

315. — Conforme á la ley reglamentaria de 20 de Febrero de 1896, las **medidas efectivas** de capacidad para usos comerciales y para áridos, son :

El <i>hectolitro</i> ,	que vale	100	litros.
El <i>medio hectolitro</i> ,	—	50	—
El <i>doble decalitro</i> ,	—	20	—
El <i>decalitro</i> ,	—	10	—
El <i>medio decalitro</i> ,	—	5	—
El <i>doble litro</i> ,	—	2	—
El <i>litro</i> ,	—	1	—
El <i>medio litro</i> ,	—	0 ¹ ,5	
El <i>doble decilitro</i> ,	—	0 ¹ ,2	

316. — Las medidas de 100, 50, 20, y 10 litros tienen la forma que resulta de truncar un prisma recto de base rectangular, por un plano que, pasando por una de las aristas menores de su base superior, forma con la misma un ángulo de 135°. El fondo de la medida es la base que queda disminuída.

Las otras medidas de capacidad tienen la forma de prisma recto de base rectangular.

317. — Las dimensiones interiores de estas medidas son :

Para la de 100 litros. — *Base inferior*, largo, 425 milímetros; *ancho*, 400 milímetros, *base superior*, largo, 825 milímetros; *ancho*,

400 milímetros; *altura*, 400 milímetros (fig. 9).

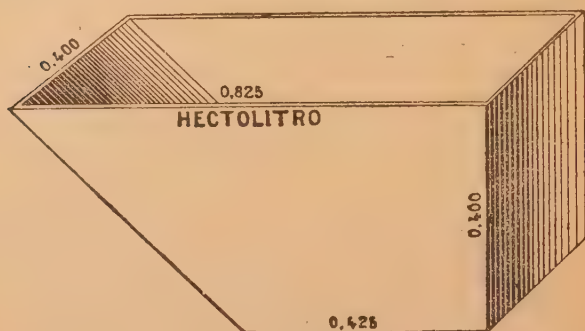


Fig. 9.

Para la de 50 litros. — *Base inferior, largo*, 375 milímetros; *ancho*, 400 milímetros; *base superior*,

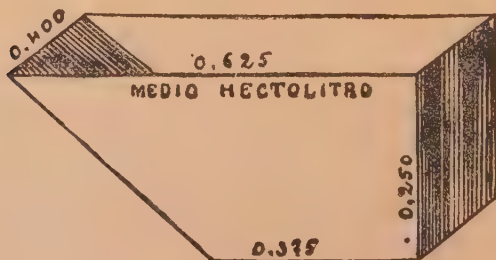


Fig. 10.

rior, largo, 625 milímetros; *ancho*, 400 milímetros, *altura*, 250 milímetros (fig. 10).

Para la de 20 litros. — *Base inferior, largo*, 300 milímetros; *ancho*, 250 milímetros; *base superior, largo*, 500 milímetros; *ancho*, 250 milímetros; *altura*, 200 milímetros (fig. 11).

Para la de 10 litros. — *Base inferior, largo, 150 milímetros; ancho, 200 milímetros; base superior, largo, 350 milímetros; ancho, 200 milímetros; altura, 200 milímetros (fig. 12).*

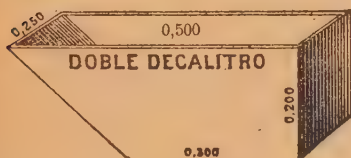


Fig. 11.

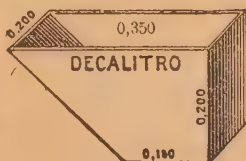


Fig. 12.

Para la de 5 litros. — *Base, largo, 200 milímetros; ancho, 200 milímetros; altura, 125 milímetros (fig. 13).*

Para la de 2 litros. — *Base, largo, 160 milímetros; ancho, 125 milímetros; altura, 100 milímetros. (fig. 14).*



Fig. 13.

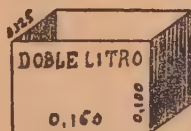


Fig. 14.

Para la de 1 litro. — *Base, largo, 100 milímetros; ancho, 100 milímetros; altura, 100 milímetros (fig. 15).*

Para la de 0,5 de litro. — *Base, largo, 100 milímetros; ancho, 100 milímetros; altura, 50 milímetros (fig. 16).*

Para la de 0,2 de litro. — Base, largo, 80 milímetros, ancho, 50 milímetros; altura, 50 milímetros.



Fig. 15.



Fig. 16.



318. — Todas estas medidas son de *madera seca*; siendo el espesor de las tablas, cuando menos, de 20 milímetros, en las piezas de 100 y de 50 litros; de 15 milímetros, en las de 20 y 10, y de 10 milímetros para todas las demás.

La parte exterior de estas medidas no está sujeta á otra prevención que la de llevar en caracteres claros la indicación de su capacidad.

319. — Conforme á la ley de 20 de Febrero de 1896 las **medidas efectivas** de capacidad, para los usos comerciales y para líquidos, son :

El <i>decalitro</i> ,	que vale	10	litros.
El <i>medio decalitro</i> ,	—	5	—
El <i>doble litro</i> (fig. 17 y 18),	—	2	—
El <i>litro</i> (fig. 19 y 20),	—	1	—
El <i>medio litro</i> (fig. 21 y 22),	—	0,5	
El <i>doble decilitro</i> ,	—	0,2	
El <i>decilitro</i> (fig. 23 y 24),	—	0,1	
El <i>medio decilitro</i> (fig. 25),	—	0,05	
El <i>centilitro</i> (fig. 26 y 27).			

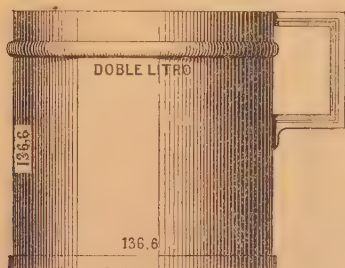


Fig. 17.

320. — Las medidas de capacidad para líquidos son, en general, de *forma cilíndrica, fondo plano*, y la altura es *igual al diámetro ó el doble* de esta magnitud.



Fig. 18.

321. — Cuando el litro se usa para medir líquidos, como el vino, el aguardiente, es de *metal* y tiene una profundidad igual al doble de su diámetro.

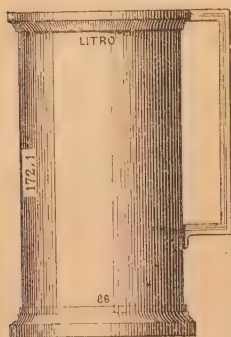


Fig. 19.

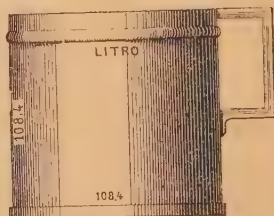


Fig. 20.

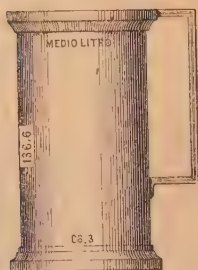


Fig. 21.

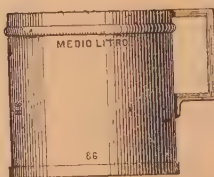


Fig. 22.

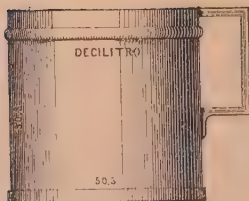


Fig. 23.



Fig. 24.



Fig. 25.



Fig. 26.



Fig. 27.

322. — Cuando el litro se usa para medir aceite ó leche, es de hoja de lata, y de una profundidad igual á su diámetro.

MEDIDAS	PARA LAS DE ALTURA IGUAL AL DIÁMETRO		PARA LAS DE ALTURA DO- BLE DEL DIÁMETRO	
	Altura.	Diámetro.	Altura.	Diámetro.
	Milímetros.	Milímetros.	Milímetros.	Milímetros.
De 10 litros. . .	233,5	233,5	370,7	185,3
— 5 — . . .	185,3	185,3	294,2	147,1
— 2 — . . .	136,6	136,6	216,8	108,4
— 1 — . . .	108,4	108,4	172,1	86,0
— 0,5 de litro. .	86,0	86,0	136,6	63,3
— 0,2 — . . .	63,4	63,4	100,6	50,3
— 0,1 — . . .	50,3	50,3	79,9	59,9
— 0,05 — . . .	39,9	39,9	63,4	31,7

323. — *Para reducir unidades de capacidad de especie mayor á menor ó viceversa, basta correr la coma respectivamente, hacia la derecha ó hacia la izquierda, un lugar por cada unidad á que se quiera reducir. EJEMPLO :*

Convertir en centilitros el número

4^{DI},3789.

Corremos la coma *tres* lugares hacia la derecha para colocarla á la derecha del 8, que expresa centilitros, y se tiene el número

4378^{el},9.

CÁLCULO DE LAS CAPACIDADES

324. — Siendo el litro equivalente á un decímetro cúbico, se puede valuar la capacidad de un depósito midiendo su volumen interior y teniendo presente que

Un m³ equivale á 1 kilolitro.

Un dm³ — 1 litro.

Un cm³ — 1 mililitro.

Cuestionario.

¿Qué es capacidad? 309. — ¿Cuál es la unidad de capacidad? 210. — ¿Para qué sirve el litro? 311. — ¿Cuáles son los múltiplos del litro? 312. — ¿Cuáles son los submúltiplos del litro? 313. — ¿Cómo se leen y escriben las unidades de capacidad? 314. — ¿Cuáles son las medidas efectivas de capacidad para áridos? 315. — ¿De qué forma son las medidas de capacidad para áridos? 316. — ¿De qué dimensiones son las medidas de capacidad para áridos? 317. — ¿De qué materia son las medidas de capacidad para áridos? 318. — ¿Cuáles son las medidas efectivas de capacidad para líquidos? 319. — ¿De qué forma son en general las medidas de capacidad para líquidos? 320. — ¿De qué forma son las medidas para líquidos? 321. — ¿De qué forma son las medidas para aceite ó leche? 322. — ¿De qué dimensiones son las medidas de capacidad? 323. — ¿Cómo se reducen unidades de capacidad de especie mayor á menor ó viceversa? 323. — ¿De qué manera se pueden valuar las capacidades? 324.

MEDIDAS DE PESO

325. — Se llama *peso* la cantidad de materia que contiene un cuerpo.

326. — La unidad de peso es el *gramo* (g.).

327. — **Gramo** (fig. 29) es el peso de un *centímetro cúbico de agua destilada, pesada en el*

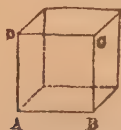


Fig. 28. — Un *centímetro cúbico* de agua pura pesa un *gramo*.



Fig. 29. — *Peso de un gramo de latón.*

*vacío y á temperatura de cuatro grados del termómetro centígrado*¹.

328. — Los múltiplos del gramo son :

El *decagramo* (^{Dg}), que vale 10 gramos.

El *hectogramo* (^{Hg}), — 100 —

El *kilogramo* (^{Kg}), — 1000 —

1. Se elige el *agua* por ser la substancia más universalmente esparcida; debe ser *destilada* para que esté exenta de substancias extrañas que alterarían su peso; debe pesarse *en el vacío* para substraerla á la presión atmosférica que podría variar su peso; debe tomarse á la temperatura de *cuatro grados*, porque á esa temperatura su densidad es máxima.

329. — Los submúltiplos del gramo son :
El *decigramo* (^{dg}), que vale la *décima parte* del gramo 0^{gr},1.

El *centigramo* (^{cg}), que vale la *centésima parte* del gramo 0^{mg},01.

El *miligramo* (^{gr}), que vale la *milésima parte* del gramo (0^{gr},001).

330. — Siendo las unidades de peso, de *diez en diez* veces mayores ó menores, se *leen y escriben* del mismo modo que las unidades de longitud.

331. — Para las pesadas ordinarias del comercio,

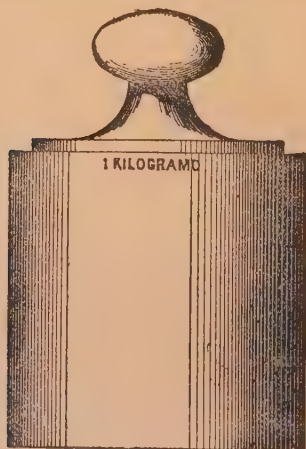


Fig. 30.

la unidad de peso es el **kilogramo** que vulgarmente se llama **kilo**. (figs. 30 y 31).

332. — Cuando la unidad de un número es el **kilogramo**, la primera cifra á la derecha de la

coma representa *hectogramos*, la segunda, *deca-*
gramos, la tercera, *gramos*.

Así los números :

$2^{\text{Kg}},3$ se enuncian **2 kilos 3 hectogramos**.

$4^{\text{Kg}},25$ — **4 kilos 25 decagramos**.

$3^{\text{Kg}},054$ — **3 kilos 54 gramos**.

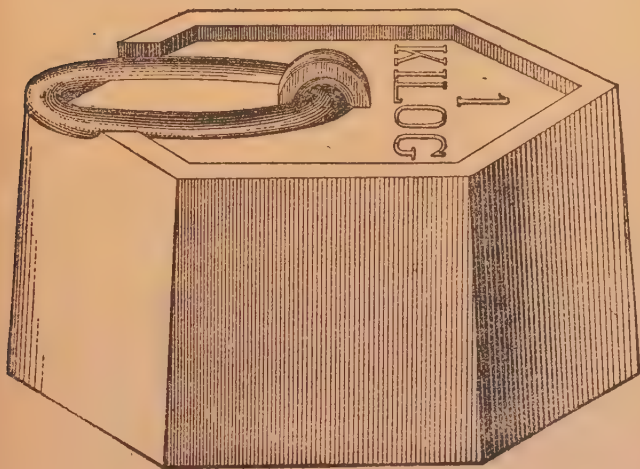


Fig. 31.

En la práctica, para mayor sencillez, los hectogramos, y los decagramos se convierten frecuentemente en gramos. Así los números anteriores se enuncian :

2 kilogramos 300 gramos (ó simplemente **2 kilos 300**).

4 kilogramos 250 gramos (ó simplemente **4 kilos 250**).

3 kilogramos 54 gramos (ó simplemente **3 kilos 54**).

333. — Para todas las pesadas muy grandes, que son hoy tan numerosas en la industria y en el comercio al por mayor, se emplea como unidad la **tonelada** con peso de 1,000 kilogramos, ó de *un metro cúbico* de agua.

334. — Úsase además el **quintal métrico**, con peso de 100 kilogramos, y que es por lo mismo la *décima* parte de la tonelada.

335. — El *gramo* y sus *submúltiplos*, que son unas hojitas de latón (fig. 32), se llaman **pesas**

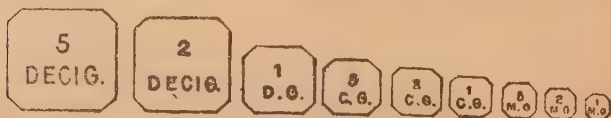


Fig. 32. (Verdadero tamaño).

menores, y sirven para determinar la pureza de los metales, para la farmacia y para los análisis químicos.

336. — El *Hectogramo* y el *Kilogramo* se llaman **pesas medianas** y sirven para los usos comunes.

337. — El *quintal métrico* y la *tonelada de mar*, se llaman **pesas mayores**.

338. — Conforme á la ley reglamentaria de 20 de Febrero de 1896, las **medidas efectivas** de peso para los usos comerciales son las siguientes :

De	20 kilogramos (fig. 36)	. .
—	10	—
—	5	—
—	2	—
—	1	—

— 500	gramos		($1/2^{Kg}$)
— 200	—		(2^{Hg})
— 100	—		(1^{Hg}) (fig. 24 y 35).
— 50	—		($1/2^{Dg}$)
— 20	—		(2^{Dg})
— 10	—		(1^{Dg}) (fig. 33).
— 5	—		($1/2^{Dg}$)
— 2	—		
— 1	—	(fig. 29)	. .
— 5	decigramos	(fig. 32)	. .
— 2	—	(fig. 32)	. .
— 1	—	(fig. 32)	. .
— 5	centigramos	(fig. 32)	. .
— 2	miligramos	(fig. 32)	. .
— 1	—	(fig. 32)	. .



Fig. 33.



Fig. 34.

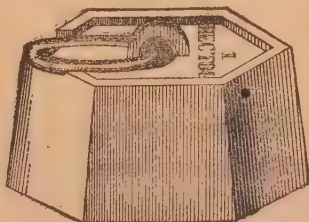


Fig. 35.

339. — Todas estas pesas son, por lo general, de *forma cilíndrica*, de hierro fundido ó de latón.

340. — Para los *comerciantes ambulantes* se usan

pesas huecas, contenidas unas dentro de otras, formando *pila*, con peso de un kilogramo (fig. 37).

Las piezas de que consta la pila son las siguientes :



Fig. 36.

Una de 500 gramos que servirá
de caja á las demás.

Una de 200 ídem,
Dos de 100 ídem,
Una de 50 ídem,
Una de 20 ídem,
Dos de 10 ídem,
Una de 5 ídem,
Dos de 2 ídem, y
Una de 1 gramo.

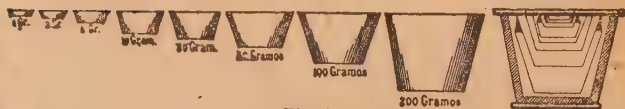


Fig. 37.

341. **Relación entre los pesos y los volúmenes.** — Hemos visto que el *gramo*, conforme á su definición, es el peso de *un centímetro* cúbico de agua destilada.

342. — El *kilogramo*, que vale *mil gramos*, será por consiguiente el peso de *mil centímetros* cúbicos de agua, ó de *un decímetro* cúbico de agua, ó de *un litro* de agua.

343. — La *tonelada*, que vale *mil kilogramos*, será el peso de *mil decímetros* cúbicos de agua, ó de *mil litros* de agua, ó de *un metro* cúbico de agua.

344. — *El peso de un cuerpo es igual al producto de su volumen por su densidad.*

$$P = V \times D.$$

Cuestionario.

¿ A qué se llama peso? 325. — ¿Cuál es la unidad de peso? 326. — ¿Qué es gramo? 327. — ¿Cuáles son los múltiplos del gramo? 328. — ¿Cuáles son los submúltiplos del gramo? 329. — ¿Cómo se leen y escriben las unidades de peso? 330. — ¿Cuál es la unidad de peso para los usos comunes? 331. — ¿Cuál es la unidad de peso para las grandes pesadas? 333. — ¿Qué es el quintal métrico? 334. — ¿Cómo se representan el gramo y sus submúltiplos? 335. — ¿Para qué sirven las pesas menores? 335. — ¿Cuáles son las pesas medianas y para qué sirven? 336. — ¿Cuáles son las pesas mayores? 337. — ¿Cuáles son las medidas efectivas de peso? 338. — ¿De qué forma son las medidas efectivas de peso? 339. — ¿De qué pesas se sirven los comerciantes ambulantes? 340. — ¿Cuánto pesa un litro de agua? 342. — ¿Cuánto pesa un metro cúbico de agua? 343. — ¿Cómo se puede encontrar el peso de un cuerpo cuando se conoce su densidad? 344.

UNIDADES DE MONEDA

345. — La unidad teórica del sistema monetario de los Estados Unidos Mexicanos está representada por setenta y cinco centigramos de oro puro y se denomina : *peso*.

346. — *Peso mexicano de plata* es una moneda con diámetro de 39 milímetros y peso de 27^{gr},073, y contiene $\frac{65}{72}$ de plata y $\frac{7}{72}$ de cobre.

347. — Las unidades menores que el peso son las siguientes :

<i>De plata.</i>	{	Cincuenta centavos (fig. 38).
		Veinte centavos.
		Diez centavos.
<i>De níquel.</i>		Cinco centavos.
<i>De bronce.</i>	{	Doscentavos.
		Un centavo.

348. — Las unidades mayores que el peso son de *oro* (fig. 39), con los valores de diez pesos y cinco pesos.

349. — Las monedas de plata y de oro no se componen respectivamente de plata pura ni de oro puro; para aumentar su dureza se les agrega, tanto á la plata como al oro, una cantidad determinada de *cobre*. Esto es lo que constituye la *liga*.

350. — **Ley de una liga** es el número que se obtiene de dividir el peso del metal fino por el peso total de la liga. Así, siendo el peso de la plata pura contenida en un *peso mexicano* 24^{er},4388, y el peso total de la misma moneda 27^{er},073, *la ley es igual á :*

$$\frac{24,4388}{27,073} = 0,9027$$

lo que quiere decir que esta liga contiene de plata 0,9027 de su peso. La ley siempre se expresa en milésimos.

También se puede decir que el peso mexicano contiene $\frac{65}{72}$ de su peso de plata, y $\frac{7}{72}$ de cobre.

351. — Del mismo modo, siendo el peso de oro puro contenido en una moneda de á diez pesos 7^{er},5,

y el peso total de la misma moneda $8^{\text{gr}},33 \frac{1}{3}$, *la ley es igual á :*

$$7^{\text{gr}},5 \div 8^{\text{gr}},33 \frac{1}{3} = 0,900.$$

352. Valor de un gramo de oro y de un gramo de plata amonedada. — La moneda de oro de á diez pesos pesa 8 gr. $\frac{1}{3}$.

Ahora bien, si $8 \frac{1}{3}$ gramos de oro amonedado valen 10 pesos, 1 gramo valdrá

$$10 \div 8 \frac{1}{3} = \$ 1,20.$$

El peso mexicano de plata pesa $27^{\text{gr}},073$.

Si $27^{\text{gr}},073$ de plata amonedada valen 1 peso, 1 gramo valdrá :

$$\frac{1}{27,073} = \$ 0,03693716.$$

353. Valor del oro con relación á la plata. — La relación del valor del oro al de la plata en México (á la par) es de $16 \frac{5}{11}$ á 1.

354. — De lo que antecede resulta un medio muy cómodo y rápido de *valuar gruesas sumas* : basta *pesarlas* en vez de *contarlas*, lo que se practica en todas las casas de Banco.

Si la suma es de oro, se multiplica \$ 1,20 por su peso en gramos.

Si la suma es de plata en pesos fuertes, se multiplica \$ 0,03693716 por su peso en gramos.

355. — Como es casi imposible obtener en las monedas pesos y leyes rigurosamente iguales á los que prescribe la ley, se ha acordado una **tolerancia** de algunos milésimos, *en más ó en menos*, en la ley y en los pesos de las monedas. Esta tolerancia es variable según la naturaleza de las monedas, pero bien determinada para cada una de ellas. (Véase la tabla de las monedas mexicanas.)

356. Valor de un kilogramo de oro puro. — Hemos visto que un kilogramo de oro amonedado con ley de **0,900** vale \$ **1200** pesos.

Si con ley de **0,900** vale \$ **1200**, con ley de **1000** milésimos valdrá :

$$\frac{\$ 1200 \times 1000}{900} = \$ 1333 \frac{1}{3}.$$

Este es el **valor intrínseco** del oro puro.

357. Valor de un kilogramo de plata pura. — Hemos visto que un kilogramo de plata amonedada con ley de **0,9027** vale \$ **36,93716**.

Si con ley de **0,9027** vale \$ **36,93716**, con ley de **1000** milésimos valdrá :

$$\frac{\$ 36,93716 \times 1000}{0,9027} = \$ 40,918.$$

Este es el **valor intrínseco** de la plata pura.

Cuestionario.

¿Cuál es la unidad de moneda? 345. — ¿Qué es peso mexicano de plata? 346. — ¿Cuáles son las unidades menores que el peso?

TABLA DE LAS MONEDAS MEXICANAS

MONEDAS	LEY	TOLERANCIA EN LEY	PESOS	TOLERANCIA EN PESO	DIÁMETRO
ORO	{ \$ 10	0,900	8,333 1/3	Gramos. ± 0,025	Milímetros. 22 1/2
	{ 5				
PLATA	{ \$ 1	9,027	27,073	± 0,100	39
	{ 0,50				
	{ 0,20				
	{ 0,10				
NÍQUEL	{ 0,05	—	5,000	± 0,25	20
	{ 0,02				
BRONCE	{ 0,01	95 partes de cobre, 4 de estaño y 1 de zinc.	6,000	± 0,30	25
	{ 0,01				



Fig. 38. — Monedas de plata, de curso legal en la República Mexicana



Fig. 39. — Monedas de oro, de curso legal en la República Mexicana.



Moneda de níquel de 5 centavos.



Fig. 41. — Monedas de bronce de á uno y dos centavos.

347. — ¿Cuáles son las unidades mayores que el peso? 348. — ¿Qué cosa es liga? 349. — ¿Qué cosa es ley de una liga? 350. — ¿Cuál es la ley de las monedas de plata? 350. — ¿Cuál es la ley de las monedas de oro? 351. — ¿Cuánto vale 1 gramo de oro amonedado? 352. — ¿Cuánto vale 1 gramo de plata amonedada? 353. — ¿De qué manera se cuentan gruesas sumas de dinero? 354. — ¿Cuál es la ley, peso, diámetro y tolerancia de las monedas de oro? 355. — ¿Cuál es la ley, peso, diámetro y tolerancia de las monedas de plata? 355. — ¿Cuál es el diámetro, peso y tolerancia del centavo de cobre? 355. — ¿Cuánto vale 1 kilogramo de oro puro? 356. — ¿Cuánto vale un kilogramo de plata pura? 357.

Ejercicios y problemas sobre sistema métrico.

150. — Leer los números siguientes :

$475^m,05 - 27^l,48 - 76^s,5 - 8^m,009 - 0^m,15 - 0^m,007$

151. — $9^{dg},048 - 8^{dr},5 - 44^{hr},050 - 0^{kg},047 - 15^{hm},09 - 66^{km},978$.

152. — $0^m,838 - 7^{dm},67 - 96^{mf},9438 - 0^{sg},5 - 2^{hl},0036 - 9^{hf},0048$.

153. — $5^{m2},0758 - 48^{m2},003 - 6^{m2},77896 - 0^{m2},702244 - 5^{m2},219$.

154. — $9^{hm2},084 - 6^{dm2},0497 - 14^{sm2},9436 - 36^a,014 - 9^{ha},217 - 0^{ca},94876$.

155. — $9^m,37 - 0^m,946 - 14^m,00084875 - 0^m,588480472$.
156. — $9^{dm},07 - 6^m,26 - 0^{dm},4376 - 0^{mm},5$.
157. — $14^s,15 - 9^s,009 - 18^s,637 - 0^s,05$.
158. — $17^{ks},037 - 46^{ks},024634 - 2^{ks},5 - 19^{us},839 - 27^{us},006 - 7^{us},46375$.
159. — $5^l,06 - 14^{ml},0036 - 9^{dl},00978 - 87^l,4 - 64^{ml},96 - 19^{dl},6$.
160. — Escribir con cifras :
 Catorce metros, setenta y cinco centímetros.
 Diez y nueve metros, seiscientos ochenta y siete milímetros.
 Cuarenta y tres centímetros.
 Nueve milímetros. — Diez y siete metros cinco centímetros.
161. — Nueve mil, cuatrocientos setenta y cinco centímetros.
 Sesenta mil, cuarenta y ocho milímetros.
 Ochocientos treinta y nueve mil, cuatrocientos ochenta y seis decímetros.
 Novecientos mil setecientos ocho centímetros.
162. — Catorce kilómetros setenta y cinco metros.
 Nueve hectómetros veintisiete metros.
 Ocho decámetros, nueve centímetros.
 Seis miriámetros quinientos setenta y seis metros.
163. — Doce metros cuadrados, siete mil quinientos sesenta y tres milímetros cuadrados.
 Cinco metros cuadrados, trescientos setenta y seis centímetros cuadrados.
 Dos metros cuadrados, setecientos cincuenta y ocho milímetros cuadrados.
 Veintidós mil, quinientos treinta centímetros cuadrados.
164. — Siete metros cúbicos, cincuenta y cuatro decímetros cúbicos.
 Cuarenta y tres mil seiscientos centímetros cúbicos.
 Catorce mil, trescientos setenta y cinco decímetros cúbicos.
 Quinientos ochenta y ocho millones, cuatrocientos ochenta mil, cuatrocientos setenta y dos milímetros cúbicos.
165. — ¿Cuál es la superficie de un cuadrado de $24^m,15$ por lado?
166. — ¿Cuál es la superficie de un triángulo de $9^{dm},5$ de base por $7^{dm},5$ de altura?
167. — ¿Cuál es la superficie de una pizarra que mide 24 centímetros de largo por 16 centímetros de ancho?
168. — ¿Cuál es el volumen de un cubo que mide $0^m,14$ por cada lado?
169. — ¿Cuál es el volumen de un trozo de madera de $7^{dm},5$ de largo, $5^{dm},4$ de ancho y $12^{dm},5$ de altura?
170. — ¿Cuál es el volumen de una esfera de $0^m,14$ de radio?
171. — ¿Cuántos litros de agua podrá contener un depósito de $2^m,45$ de largo, $1^m,97$ de ancho y $0^m,87$ de profundidad?

-
172. — ¿Cuánto pesan 1200 monedas de plata de á un peso?
173. — ¿Cuánto pesan cien monedas de bronce de á un centavo?
174. — ¿Cuánto pesa un trozo de mármol de 2 metros de largo, 1 metro de ancho y un metro de altura?
175. — ¿Cuánto pesará el agua pura contenida en una esfera hueca de $0^m,15$ de radio?
176. — Un vaso lleno de agua pesa $3^k,7$, el peso del vaso es de 5 hectogramos. ¿Cuál es su capacidad?
177. — ¿Cuál es el valor de un gramo de plata amonedada?
178. — ¿Cuál es el valor de un gramo de oro amonedado?
179. — ¿Cuántos litros de agua contiene un tinaco de forma cúbica que mide $1^m,75$ por cada arista, y que está lleno hasta los tres cuartos solamente?
-

CUADRADO Y RAIZ CUADRADA

358. — **Cuadrado** ó segunda potencia de un número es el producto de ese número multiplicado una vez por sí mismo.

359. — **Para elevar al cuadrado** un número *compuesto de decenas y unidades*, ó se multiplica una vez por sí mismo, ó se hace uso de la fórmula siguiente :

$$(d + u)^2 = d^2 + 2d \times u + u^2$$

que significa : *cuadrado de decenas, más duplo de decenas por unidades, más cuadrado de unidades.*

Ejecutada la primera parte se le agregan dos ceros, porque el cuadrado de decenas produce centenas : á la segunda se le agrega un cero, porque decenas multiplicadas por unidades dan decenas, y á la tercera no se le agrega nada, porque cuadrado de unidades produce unidades. **EJEMPLO :**

¿Cuál es la superficie de un terreno de forma cuadrada que mide 75 metros por lado?

$$\begin{aligned}
 (70 + 5)^2 &= 70^2 + 2 \times (70 \times 5) + 5^2 \\
 d^2 &= 70^2 = \dots\dots\dots 4900 \\
 2d \times u &= 2 \times (70 \times 5) = \dots\dots\dots 700 \\
 u^2 &= 5^2 = \dots\dots\dots 25
 \end{aligned}$$

Superficie. 5525 m. cuad.

360. — **El cuadrado de la suma de dos cantidades** es igual al *cuadrado de la primera más el doble producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda*. EJEMPLO :

$$\begin{aligned}
 (6 + 3)^2 &= 81 \\
 6^2 &\dots\dots\dots 36 \\
 2 \times (6 \times 3) &\dots\dots\dots 36 \\
 3^2 &\dots\dots\dots 9 \\
 &\hline
 &81
 \end{aligned}$$

361. — **El cuadrado de la diferencia de dos cantidades** es igual al *cuadrado de la primera, menos el doble producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda*. EJEMPLO :

$$(8 - 5)^2 = 8^2 - 2 \times (8 \times 5) + 5^2 = 64 - 80 + 25 = 89 - 80 = 9.$$

362. — **La suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia** es igual á la *diferencia de sus cuadrados*. EJEMPLO :

$$(5 + 3) \times (5 - 3) = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16.$$

363. — **Para elevar un quebrado al cua-**

drado, se elevan por separado el numerador y el denominador. Ejemplo :

$$\left(\frac{2}{4}\right)^2 = \frac{2^2}{4^2} = \frac{4}{16}.$$

364. — *El cuadrado de una fracción decimal se obtiene como el de los enteros y consta siempre de un número doble de cifras decimales que las del número propuesto.*

365. — **Raíz¹ cuadrada** es el número que multiplicado por sí mismo da el número propuesto. Así la raíz cuadrada de 81 es 9, porque $9 \times 9 = 81$.

366. — **Para extraer la raíz cuadrada de un número, se comienza por dividirlo en secciones de dos en dos cifras, empezando por la derecha, y no importa que la última sección tenga una sola** (porque si la raíz no pasa de una cifra, su cuadrado no pasará de dos; pero si la raíz pasa de una cifra, el cuadrado pasará de dos : en resumen, tendrá tantas cifras la raíz como secciones haya en el número propuesto : y como el cuadrado de decenas, que son las que tienen que extraerse ante todo, producen centenas, no pueden estar contenidas en las unidades, ni las decenas, ó bien en la segunda sección, sino estarán precisamente en la primera de la izquierda). *Se busca un número cuyo cuadrado se pueda restar de la primera sección y se coloca en seguida de la cantidad propuesta, siendo*

1. Del nombre latino *radix*, raíz.

decenas de la raíz; después se cuadra y se resta el cuadrado de dicha sección: bajando acto continuo la siguiente y separando con una coma la primera cifra de la derecha. (Porque habiendo extraído el cuadrado de las decenas, faltan las otras dos partes, y para encontrar las unidades hay que recurrir á la 2ª de dichas partes: $2d \times u$, que como produce decenas no puede estar en las unidades). Ahora se duplica la raíz y se divide lo que está á la izquierda de la coma por este duplo. (Porque es claro que estando contenido en lo que está á la izquierda de la coma, el duplo de decenas multiplicado por unidades, si lo dividimos por el duplo de las decenas, tendrá que resultar las unidades de la raíz). El cociente se coloca al lado de la repetida raíz y al multiplicarlo por el duplo se ejecuta á la vez por sí mismo y se resta el producto de la cantidad de que se está extrayendo la raíz. Se baja la siguiente sección, y así se continúa la operación.

Si no quedare residuo, la cantidad tendrá raíz exacta: de lo contrario será sorda ó irracional¹, en cuyo caso se pondrá el residuo al lado de la raíz como numerador, dándole por denominador la raíz duplicada más una unidad; ó se aproxima por decimales agregando dos ceros al residuo por cada cifra decimal que se quiera sacar, ó dos cifras del período si la cantidad es fracción periódica.

1. De las voces latinas *in*, *no*, *ratio*, razón; porque no puede ser expresada exactamente por números enteros, ni por fracciones.

Si hay decimales, se hace, previamente, que el número de ellas sea par, agregando un cero á la derecha, y se procede según se acaba de indicar, teniendo cuidado de poner una coma en la raíz al bajar el primer período decimal. Si la fracción decimal es periódica, en vez de agregar ceros, se agregan cifras del período. EJEMPLO :

El patio de una casa es de forma cuadrada y mide $551 \text{ m}^2,69$, ¿cuánto mide cada lado?¹

$\sqrt{5.61,69}$	^m 23,7
16,1	43
326,9	46 7
000	

367. — La resta obtenida en la extracción de la raíz cuadrada, debe ser igual ó menor que el duplo de la raíz.

368. — Para hacer la prueba, se saca el cuadrado de la raíz, se agrega el residuo, si lo hubiere, y el resultado tiene que ser igual al número de que se extrajo la raíz.

369. — En la extracción de la raíz cuadrada de los quebrados, se presentan tres casos : 1° cuando los dos términos son un cuadrado perfecto, 2° cuando uno de ellos lo es y el otro no, y 3° cuando ninguno de los términos es cuadrado perfecto.

1. El signo $\sqrt{}$ parece que proviene de r, inicial de raíz, y se atribuye á Rudolph (1524).

370. — En el **primer caso** se le extrae por separado al numerador y al denominador. EJEMPLO :

$$\sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{16}} = \frac{2}{4}.$$

371. — En el **segundo caso** se le extrae exacta al que la tenga y al otro aproximada. EJEMPLO :

$$\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{2,236} = \frac{2000}{2236} = \frac{500}{559}.$$

372. — El **tercer caso** se reduce al segundo, multiplicando los dos términos por el numerador ó el denominador. EJEMPLO :

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{4}{6}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{6}} = \frac{2}{2,44} = \frac{200}{244} = \frac{50}{61}.$$

373. **Aplicaciones geométricas.** — 1ª *El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.* Por eso vemos que en la figura 42 se tiene :

$$5^2 = 4^2 + 3^2.$$

374. — 2ª *El cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa, menos el cuadrado del otro cateto.*

En la fig. 42 vemos que $4^2 = 5^2 - 3^2$.

375. — 3ª *La hipotenusa es igual á la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos.*

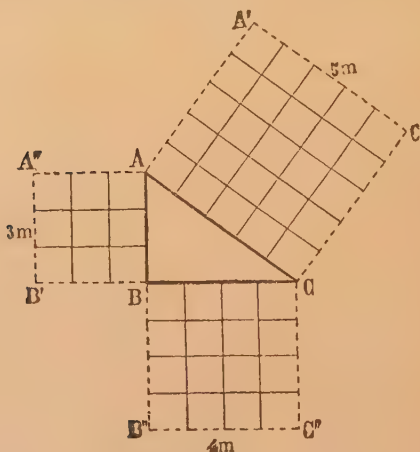


Fig. 42.

En la fig. 42 vemos que $5 = \sqrt{4^2 + 3^2}$.

376. — 4^a Un cateto es igual á la raíz cuadrada del cuadrado de la hipotenusa, menos el cuadrado del otro cateto ¹.

En la fig. 42 vemos que $3 = \sqrt{5^2 - 4^2}$

Cuestionario.

¿Qué es cuadrado? 358. — ¿Cómo se eleva al cuadrado un número compuesto de decenas y unidades? 359. — ¿A qué es igual el cuadrado de la suma de dos cantidades? 360. — ¿A qué es igual el cuadrado de la diferencia de dos cantidades? 361. — ¿A qué es igual la suma de dos cantidades multiplicadas por su diferencia? 362. — ¿Cómo se eleva un quebrado al cuadrado? 363. — ¿De cuántas cifras decimales consta el cuadrado de una fracción decimal? 364. — ¿Qué es raíz cuadrada? 365. — ¿Cómo

1. Véase el tercer tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor.

se extrae la raíz cuadrada de un número? 366. — ¿Cómo se prueba esta operación? 368. — ¿Cuántos casos se presentan en la extracción de la raíz cuadrada de los quebrados, y cómo se resuelve cada uno de ellos? 369. — ¿A qué es igual el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo? 373. — ¿A qué es igual el cuadrado de un cateto? 374. — ¿A qué es igual la hipotenusa? 375. — ¿A qué es igual un cateto? 376.

Ejercicios y problemas sobre cuadrado y raíz cuadrada.

180. — Elevar al cuadrado el número 75.

181. — Elevar al cuadrado los números :

$$425 - 0,27 - 9,23 - 3,15 - 0,838 - 7496.$$

182. — Elevar al cuadrado :

$$\frac{7}{8} - \frac{4}{9} - \frac{12}{27} - \frac{36}{9}.$$

183. — Ejecutar las operaciones indicadas :

$$(4 + 7)^2 =$$

$$\left(7 + \frac{3}{8}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{3}{8} + \frac{2}{6}\right)^2 =$$

$$\left(3 + \frac{12}{6}\right)^2 =$$

184. — Ejecutar las operaciones indicadas :

$$(9 + 0,75)^2 =$$

$$\left(\frac{3}{5} + 0,87\right)^2 =$$

$$\left(0,47 + 4\frac{2}{6}\right)^2 =$$

$$\left(5,27 + \frac{1}{5}\right)^2 =$$

185. — Extraer la raíz cuadrada de los números :

$$729. - 512. - 576. - 1156$$

186. — ¿Cuál es la raíz cuadrada de 824464?

187. — ¿Cuál es la raíz cuadrada de 0,702244?

188. — ¿Cuál es la raíz cuadrada de los números :

$$\frac{49}{64} \cdot \frac{9}{25} \cdot \frac{25}{36} \cdot \frac{4}{81}?$$

189. — ¿Cuál es la raíz cuadrada de los números :

$$\frac{14}{28} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{16}{12}?$$

190. — Ejecutar las operaciones indicadas :

$$\sqrt{5 + \frac{3}{8}} =$$

$$\sqrt{\frac{3}{9} + \frac{7}{8}} =$$

$$\sqrt{\frac{7}{16} + 1} =$$

$$\sqrt{3 + 0,5 + \frac{3}{5}} =$$

191. — Ejecutar las operaciones indicadas :

$$\sqrt{2} =$$

$$\sqrt{\frac{3}{7}} =$$

$$\sqrt{\frac{25}{100}} =$$

$$\sqrt{1} =$$

CUBO Y RAÍZ CÚBICA

377. — **Cubo** ó *tercera potencia* de un número es el producto que resulta de multiplicarlo *dos veces* por sí mismo.

378. — **Para elevar al cubo** un número *compuesto de decenas y unidades*, ó se multiplica *dos veces* por sí mismo, ó se hace uso de la fórmula siguiente :

$$(d + u)^3 = d^3 + 3d^2 \times u \times 3d \times u^2 + u^3$$

que significa : *cubo de decenas, más triple cuadrado de decenas multiplicado por unidades, más triple de decenas multiplicado por cuadrado de unidades, mas cubo de unidades.*

Ejecutada la primera parte se le agregan tres ceros, porque el cubo de decenas produce millares : á la segunda dos, porque el cuadrado de decenas produce centenas ; á la tercera uno, porque decenas multiplicadas por unidades producen decenas, y á la cuarta no se le agrega nada, porque cubo de unidades produce unidades. **EJEMPLO :**

¿Cuántos litros de agua podrá contener un tinaco de forma cúbica cuyo lado interior mide $2^m,5$?

$$\begin{array}{rcl}
 d^3. & . & 2^3 . . 8000 \\
 3d^2 \times u . & . & 3 \times 2^2 \times 5 . . 6000 \\
 3d \times u^2 . & . & 3 \times 2 \times 5^2 . . 1500 \\
 u^3 . & . & 5^3 . . 125
 \end{array}$$

$$15,625 \text{ m}^3 = 15625 \text{ litros.}$$

379. — **Para elevar al cubo un quebrado** se elevan por separado el numerador y denominador : EJEMPLO.

$$\left(\frac{2}{4}\right)^3 = \frac{2^3}{4^3} = \frac{8}{64}.$$

380. — *El cubo de una fracción decimal se obtiene como el de los enteros, y consta siempre de un número triple de cifras decimales que las del número propuesto.*

381. — **Raíz cúbica** es el número que multiplicado *dos veces* por sí mismo da por producto el número propuesto. Así, la raíz cúbica de 64 es 4, porque $4 \times 4 \times 4 = 64$.

382. — **Para extraer la raíz cúbica de un número, se divide, ante todo, en secciones de tres en tres cifras, comenzando por la derecha, y no importa que la última sección tenga dos ó una cifra.** (Porque todo cubo que no pase de tres cifras tendrá sólo una en la raíz; pero si pasa de tres, también la raíz pasará de una, es decir, tendrá decenas y unidades; y como el cubo de decenas,

que son las que tienen que extraerse ante todo, produce millares, es claro que no pueden estar contenidas en las unidades, ni decenas, ni centenas ó bien en la segunda sección, sino estarán precisamente en la primera de la izquierda). Se busca, pues, un número cuyo cubo se pueda restar de la primera sección, y se coloca en seguida de la cantidad, se cubica, se resta el cubo de la primera sección, y luego se baja la siguiente, separando con una coma dos cifras á la derecha. (Porque habiendo extraído el cubo de las decenas, faltan las otras tres partes, y para encontrar las unidades de la raíz hay que recurrir á la segunda de dichas partes : $3 d^2 \times u$. Mas como el cuadrado de decenas produce centenas, no puede estar en las unidades ni en las decenas). Luego se divide lo que está á la izquierda de la coma por el triple cuadrado de decenas, y se coloca el resultado en seguida de las decenas de la raíz, pues serán las unidades que se buscan. (Porque es claro que estando contenido en lo que está á la izquierda de la coma, el triple cuadrado de decenas multiplicado por unidades, si lo dividimos por el triple cuadrado de decenas, tendrá que resultar las unidades de la raíz.)

Ahora, como hay, además de la segunda, la tercera y cuarta parte del cubo que aún faltan que extraerse, se formarán dichas tres partes, se suman, y se resta la suma de la cantidad de que se está extrayendo la raíz cúbica, teniendo cui-

dado que la resta sea menor que el triple cuadrado de la raíz, más el triple de la raíz, más la unidad. Si no quedare residuo, la cantidad tendrá raíz exacta, de lo contrario, será sorda ó irracional, en cuyo caso se pone el residuo como numerador, dándole por denominador el triple cuadrado de la raíz, más el triple de la raíz, más la unidad; ó se aproxima por decimales, agregando tres ceros al residuo por cada cifra decimal que se quiera sacar. Si hay decimales, se hace que el número de ellas sea múltiplo de tres, agregando uno ó dos ceros á la derecha, y se procede según se acaba de indicar, teniendo cuidado de poner una coma en la raíz al bajar el primer período decimal. Si la fracción decimal es periódica, en vez de agregar ceros se agregan cifras del período. EJEMPLO.

¿Qué dimensiones deben darse á una alberca de forma cúbica, para que pueda contener 14886,936 litros de agua?

$\sqrt{14.886,936}$	24,6
8	12
68,86	1728
58,24	
- 1062 9,36	
1062 9,36	
0	

Así, pues, la alberca en cuestión deberá medir 24 metros, 6 decímetros por cada lado.

383. — Para hacer la **prueba** se saca el cubo de la raíz, se agrega el residuo, si lo hubiere, y el resultado tiene que ser igual al número de que se extrajo la raíz.

384. — En la extracción de la raíz cúbica de los quebrados se presentan tres casos : 1° *Cuando los dos términos son un cubo perfecto*; 2° *Cuando uno de ellos lo es y el otro no*; y 3° *Cuando ninguno de ellos es cubo perfecto*.

385. — En el **primer caso** se le extrae por separado al numerador y denominador. EJEMPLO :

$$\sqrt[3]{\frac{27}{343}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{343}} = \frac{3}{7}.$$

386. — En el **segundo caso**, se le extrae exacta al que la tenga y al otro aproximada. EJEMPLO :

$$\sqrt[3]{\frac{7}{8}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1,81}{8} = \frac{181}{200}.$$

387. — En el **tercer caso**, se multiplican ambos términos por el *cuadrado* del numerador ó del denominador, quedando reducido al caso anterior. EJEMPLO :

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 4^2}{4 \cdot 4^2}} = \frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3,6}{4} = \frac{36}{40}.$$

388. **Raíces superiores al cubo.** — *Cuando el índice de la raíz es un número múltiplo de*

otros, se descompone en factores, y el resultado será igual á las raíces sucesivas de la cantidad, indicadas por esos factores. EJEMPLO :

$$\sqrt[12]{5314441} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{5314441}}} = \sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{27} = 3.$$

389. — Para hacer la **prueba**, se eleva la raíz sucesivamente á las potencias indicadas por los mismos factores. EJEMPLO :

$$3^{12} = (3^3)^2 = (27)^2 = 729^2 = 5314441^1.$$

Cuestionario.

¿Qué es cubo? 377. — ¿Cómo se eleva al cubo un número compuesto de decenas y unidades? 378. — ¿Cómo se eleva un quebrado al cubo? 379. — ¿De cuántas cifras decimales consta el cubo de una fracción decimal? 380. — ¿Qué es raíz cúbica? 381. — ¿Cómo se extrae la raíz cúbica de un número? 382. — ¿Cómo se prueba esta operación? 383. — ¿Cuántos casos se presentan en la extracción de la raíz cúbica de un número y cómo se resuelve cada uno de ellos? 384. — ¿Cómo se extrae la raíz de un grado superior al cubo? 388. — ¿Cómo se prueba esta operación? 389.

Ejercicios y problemas sobre cubo y raíz cúbica.

192. — Elevar al cubo el número 75.

193. — Elevar al cubo los números : 47. — 976. — 312 — 0,28. — 4,15.

194. — Elevar al cubo los números : 4,17. — 0,838 — $\frac{7}{8}$. — $\frac{2}{5}$.

1. Véase el tercer tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor.

195. — Ejecutar las operaciones indicadas :

$$(7 + 9)^3 =$$

$$\left(3 + \frac{2}{5}\right)^3 =$$

$$\left(\frac{2}{9} + \frac{3}{7}\right)^3 =$$

$$\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{7}\right)^3 =$$

196. — Ejecutar las operaciones indicadas :

$$(2 + 0,25)^3 =$$

$$\left(\frac{7}{9} + 0,25\right)^3 =$$

$$\left(0,37 + 5\frac{2}{8}\right)^3 =$$

$$\left(3,21 + \frac{7}{8}\right)^3 =$$

197. — Extraer la raíz cúbica de los números :

$$216. — 125. — 343. — 729$$

198. — ¿Cuál es la raíz cúbica del número : 5000211 ?

199. — ¿Cuál es la raíz cúbica de 0,588480472 ?

200. — Ejecutar las operaciones indicadas :

$$\sqrt[3]{7 + \frac{2}{5}} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{2}{5} + \frac{3}{9}} =$$

$$\sqrt[3]{0,25 + \frac{1}{2}} =$$

$$\sqrt[3]{2} =$$

RAZONES Y PROPORCIONES

390. — **Razón** es el resultado de la comparación de dos cantidades homogéneas.

391. — La cantidad que se compará se llama *antecedente*; aquella con quien se compara, *consecuente*; las dos juntas se llaman *términos de la razón*.

392. — La razón se divide en *aritmética* y *geométrica*.

393. — **Razón aritmética** ó *por diferencia*, es la diferencia entre dos cantidades homogéneas.

394. — **Razón geométrica** ó *por cociente*, es el cociente de dos cantidades homogéneas.

395. — La razón aritmética se indica poniendo entre el antecedente y el consecuente, un punto que se lee : *es á*; ó bien separando ambos términos por el signo *menos*. EJEMPLO :

8. 5, ó bien $8 - 5$, se leerá : 8 es aritméticamente á 5.

396. — Si el antecedente es igual al consecuente, como 7. 7, se llama razón de *igualdad*; si es mayor, como 7. 5, de *mayor desigualdad*, y si es menor, como 7. 12, de *menor desigualdad*.

397. — En la razón de menor desigualdad el exponente es *negativo*; v. g. :

$$3.9 = -6.$$

398. — La razón aritmética no cambia de valor cuando al antecedente y consecuente se les agrega ó quita *una misma cantidad*. EJEMPLO :

$$4.2 = 7.5 = 3.1.$$

399. — La razón geométrica se indica separando el antecedente del consecuente con dos puntos, que se leen : *es á*; ó bien en forma de quebrado : el antecedente como numerador, y el consecuente como denominador. EJEMPLO :

$$4 : 9 \text{ ó } \frac{4}{9}.$$

400. — La razón geométrica no cambia de valor cuando se multiplican ó dividen *sus dos términos por un mismo número*. EJEMPLO :

$$8 : 4 = 16 : 8 = 4 : 2.$$

401. — Dos cantidades están en **razón directa** cuando haciéndose una de ellas 2, 3, 4... veces *mayor* la otra se hace al mismo tiempo 2, 3, 4... veces *mayor*, ó cuando haciéndose una de ellas 2, 3, 4... veces **menor**, la otra se hace al mismo tiempo 2, 3, 4... veces **menor**.

Así, por ejemplo, en una fábrica la cantidad de

trabajo está en razón *directa* del número de operarios, porque mientras *mayor* sea la cantidad de operarios, *mayor* será la cantidad de trabajo y viceversa.

402. — Dos cantidades están en **razón inversa** cuando haciéndose una de ellas 2, 3, 4.... veces *mayor* la otra se hace al mismo tiempo 2, 3, 4,... veces *menor*, ó cuando haciéndose una de ellas 2, 3, 4,... veces *menor* la otra se hace al mismo tiempo 2, 3, 4... veces *mayor*.

Así, en el ejemplo anterior, para determinada cantidad de trabajo, el tiempo está en razón *inversa* del número de operarios, porque mientras *más* gente trabaje, *menos* tiempo emplearán, y viceversa.

403. — **Proporción** es la igualdad de dos razones.

404. — Si las razones que se comparan son aritméticas, la proporción se llama **proporción aritmética** ó *por diferencia*; y si son geométricas, recibe el nombre de **proporción geométrica** ó *por cociente*.

405. — *Se forma una proporción aritmética*, poniendo en seguida de la primera razón *dos puntos*, uno sobre otro, que se leen *como*, luego se les agrega ó quita una misma cantidad á los dos términos, y se escriben los resultados á continuación, separados por *un punto*, que se lee *es á*.

EJEMPLO :

$$4.9 : 4 + 3.9 + 3$$

$$4.9 : 7.12.$$

406. — También se escribe la proporción aritmética en forma de igualdad¹ reemplazando el punto por el signo *menos* y los dos puntos por el signo *igual á*. EJEMPLO :

$$4 - 9 = 7 - 12.$$

407. — El primero y cuarto términos de una proporción cualquiera se llaman *extremos*, y el segundo y tercero, *medios*.

408. — Cuando los medios de una proporción aritmética ó geométrica son desiguales, como 7.6 : 10.9, se llama proporción *discreta*, y cuando son iguales como en 7.6 : 6.5, recibe el nombre de proporción *continua*.

409. — *Para obtener una proporción aritmética continua*, se forma la primera razón con dos cantidades cualesquiera; en seguida, se añade á los dos términos el exponente, si la razón es de menor desigualdad, ó se les quita si es de mayor desigualdad, formando con los resultados la segunda razón que se separa de la primera con dos puntos que se leen : *como*. EJEMPLO :

$$4.6 : 4 + 2.6 + 2$$

$$4.6 : 6.8$$

$$5.3 : 5 - 2.3 - 2$$

$$5.3 : 3.1$$

1. Se llama igualdad á la expresión compuesta de varias cantidades separadas por el signo *igual á*. Las cantidades que están antes del signo *igual á* forman el *primer miembro*; y las que están después, el *segundo miembro* de la igualdad.

410. — La proporción aritmética continua se expresa también de la manera siguiente :

$$\div 4.6.8$$

411. — La propiedad fundamental de la proporción aritmética es que, la suma de los extremos es igual á la suma de los medios.

EJEMPLO :

$$\begin{aligned} 8.3:12.7 \\ 8+7=3+12 \end{aligned}$$

412. — Cuatro cantidades están en proporción aritmética cuando la suma de dos ellas es igual á la suma de las otras dos; v. gr. : Si en 7, 12, 9 y 4 tenemos $7+9=12+4$, podremos formar la proporción 7.12:4.9.

413. — En la proporción aritmética, un extremo es igual á la suma de los medios, menos el otro extremo. EJEMPLO :

$$\begin{aligned} 7.12:4.X \\ X=(12+4)-7=9. \end{aligned}$$

414. — Un medio es igual á la suma de los extremos menos el otro medio. EJEMPLO :

$$\begin{aligned} 7.12:X.9 \\ X=(7+9)-12=4. \end{aligned}$$

415. — Un medio aritmético continuo es igual á la mitad de la suma de los extremos. EJEMPLO :

$$\div 6.X.8 \qquad X=\frac{6+8}{2}=7.$$

416. — Se forma una proporción *geométrica* poniendo en seguida de la primera razón *cuatro puntos* que se leen *como*, luego se multiplican ó dividen los dos términos por un mismo número, y se escriben los resultados á continuación, separados por dos puntos que se leen : *es á*. EJEMPLO :

$$6 : 12 :: 6 \times 3 : 12 \times 3$$

$$6 : 12 :: 18 : 36.$$

417. — Para obtener una proporción *geométrica continua* se escribe la primera razón, luego *cuatro puntos* que se leen : *como*, en seguida se dividen los dos términos por el exponente, y se escriben los resultados á continuación, separados por dos puntos. EJEMPLO :

$$4 : 8 :: 4 \div \frac{4}{8} : 8 \div \frac{4}{8}$$

$$4 : 8 :: 8 : 16.$$

418. — La proporción geométrica continua suele escribirse así :

$$\div \div 4 : 8 : 16.$$

419. — La **propiedad fundamental** de la *proporción geométrica* es que el *producto de los medios es igual al producto de los extremos*.

420. — *Cuatro cantidades están en proporción geométrica*, cuando el producto de dos de ellas es igual al producto de las otras dos, v. gr. : Si en los números 12, 3, 2 y 8, se tiene que $12 \times 2 = 8 \times 3$, resulta la proporción $12 : 8 :: 3 : 2$.

421. — *Uno de los extremos de una proporción geométrica es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo.* EJEMPLO :

$$4 : 9 :: 12 : X$$

$$X = \frac{9 \times 12}{4} = 27.$$

422. — *Uno de los medios es igual al producto de los extremos, dividido por el otro medio.*

423. — *Un medio geométrico es igual á la raíz cuadrada del producto de los extremos.* EJEMPLO :

$$\div 9 : X : 4 \quad X = \sqrt{9 \times 4} = 6.$$

424. — En toda proporción geométrica se pueden efectuar las siguientes *transformaciones*, sin que deje de subsistir la proporción.

1° **Alternar**, que es mudar de lugar los medios ó los extremos.

2° **Invertir**, que es poner los medios en lugar de los extremos y los extremos en lugar de los medios.

3° **Permutar**, que es poner la segunda razón por primera, y la primera por segunda.

4° **Componer**, que es comparar la *suma* de antecedente y consecuente con uno de los dos, esto es, ó con el antecedente ó con el consecuente de cada razón.

5° **Dividir**, que es comparar la *diferencia* de antecedente y consecuente con uno de los dos en

cada una de las razones, esto es, ó bien con el antecedente, ó bien con el consecuente, de cada razón.

Sea la proporción . $8 : 4 :: 24 : 12$

Alternando medios. $8 : 24 :: 4 : 12$

Idem extremos. . . . $12 : 4 :: 24 : 8$

Invirtiéndolo. $4 : 8 :: 12 : 24$

Permutando $24 : 12 :: 8 : 4$

Componiendo . . . $8 + 4 : 4 :: 24 + 12 : 12$

Dividiendo. $8 - 4 : 4 :: 24 - 12 : 12$

425. — *Si se multiplican ó dividen por un mismo número los antecedentes de una proporción, así como sus consecuentes, el valor de ésta no se altera.*

426. — *La suma ó diferencia de los antecedentes es á la suma ó diferencia de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*

En la proporción : $7 : 21 :: 9 : 27$
tendremos ¹. . . . $7 \pm 9 : 21 \pm 27 :: 9 : 27$.

427. — *La suma de los antecedentes es á su diferencia como la de los consecuentes es á la suya.*

En la proporción : $7 : 21 :: 9 : 27$
tendremos : $7 + 9 : 7 - 9 :: 21 + 27 :: 21 - 27$.

428. — *Si se multiplican ordenadamente varias proporciones, los productos que resulten estarán*

1. Este signo $\pm$ se llama de ambigüedad y se lee : más ó menos.

en proporción. EJEMPLO :

$$12 : 4 :: 6 : 2$$

$$3 : 5 :: 9 : 15$$

$$9 : 18 :: 3 : 6$$

$$12 \times 3 \times 9 : 4 \times 5 \times 18 :: 6 \times 9 \times 3 : 2 \times 15 \times 6$$

429. — Cuando cuatro cantidades están en proporción, lo están igualmente sus potencias y raíces del mismo grado.

Sea la proporción $15 : 7 :: 30 : 14$

Elevando al cubo sus 4 términos. $15^3 : 7^3 :: 30^3 : 14^3$

Extrayendo raíz cubica . . . $\sqrt[3]{15} : \sqrt[3]{7} :: \sqrt[3]{30} : \sqrt[3]{14}$.

430. — Se pueden simplificar una ó varias proporciones, dividiendo el antecedente y consecuente de una misma razón, ó bien los antecedentes, ó bien los consecuentes por un mismo número : no pudiéndose, por lo tanto, simplificar un medio con otro medio ni un extremo con otro extremo.

431. — Cuando dos proporciones tienen una razón común, se puede suprimir ésta y formar con las dos restantes una nueva proporción. EJEMPLO :

$$7 : 5 :: 14 : 10$$

$$21 : 15 :: 7 : 5.$$

Suprimiendo la razón común, $7 : 5$, queda :

$$14 : 10 :: 21 : 15.$$

Cuestionario.

¿Qué es razón? 390. — ¿Qué es antecedente? 391. — ¿Qué es consecuente? 391. — ¿En qué se divide la razón? 392. — ¿Qué es razón aritmética? 393. — ¿Qué es razón geométrica? 394. — ¿Cómo se indica la razón aritmética? 395. — ¿Cómo se indica la razón geométrica? 399. — ¿Cuál es la propiedad fundamental de la razón geométrica? 400. — ¿Cuándo se dice que dos cantidades están en razón directa? 401. — ¿Cuándo se dice que dos cantidades están en razón inversa? 402. — ¿Qué es proporción? 403. — ¿En qué se divide la proporción? 404. — ¿Qué es proporción geométrica? 404. — ¿Qué es proporción aritmética? 404. — ¿Cómo se forma una proporción aritmética? 405. — ¿De qué otra manera se escribe la proporción aritmética? 406. — ¿Qué es igualdad? 406. Nota. — ¿A qué se llama primer miembro de una igualdad? 406. Nota. — ¿Qué cosa es el segundo miembro de una igualdad? 406. Nota. — ¿A qué se llaman extremos de una proporción cualquiera? 407. — ¿A qué se llaman medios en una proporción? 407. — ¿Qué cosa es proporción discreta? 408. — ¿Qué cosa es proporción continua? 408. — ¿Cómo se obtiene una proporción aritmética? 409. — ¿Cómo se indica la proporción aritmética continua? 410. — ¿Cuál es la propiedad fundamental de la proporción aritmética? 411. — ¿Cuándo forman proporción aritmética cuatro cantidades? 412. — ¿A qué es igual cualquiera de los extremos de una proporción aritmética? 413. — ¿A qué es igual cualquiera de los medios de una proporción aritmética? 414. — ¿A qué es igual un medio aritmético? 415. — ¿Cómo se forma una proporción geométrica? 416. — ¿Cómo se obtiene una proporción geométrica continua? 417. — ¿Cómo se escribe la proporción geométrica continua? 418. — ¿Cuál es la propiedad fundamental de la proporción geométrica? 419. — ¿A qué es igual cualquiera de los medios de una proporción geométrica? 422. — ¿A qué es igual un medio geométrico? 423. — ¿Qué transformaciones se pueden efectuar en la proporción geométrica sin que altere su valor? 424. — ¿Qué es alternar? 424. 1° — ¿Qué es invertir? 424. 2° — ¿Qué es permutar? 424. 3° — ¿Qué es componer? 424. 4° — ¿Qué es dividir? 424. 5° — ¿Qué alteración sufre la proporción aritmética cuando se multiplican ó dividen por un mismo número los antecedentes ó consecuentes? 425. — ¿En qué relación está la suma ó diferencia de los antecedentes con la suma ó diferencia de los consecuentes? 426. — ¿En qué relación está la suma de los antecedentes con su diferencia? 427. — ¿Qué resultado se obtiene de multiplicar ordenadamente

varias proporciones? 428. — ¿Qué resultado se obtiene si se elevan á la misma potencia ó se les extrae la raíz del mismo grado á los cuatros términos de una proporción? 429. — ¿Cómo se simplifican las proporciones? 430. — ¿Qué operación puede verificarse cuando dos proporciones tienen una razón común? 431.

Ejercicios y problemas sobre razones y proporciones.

201. — Escribir una proporción aritmética cuya primera razón sea 5.9.

202. Escribir varias proporciones aritméticas cuya primera razón sea 7.15.

203. — Formar una proporción aritmética con los números : 7, 5, 9 y 7.

204. — Formar una proporción aritmética con los números 3, 6, 15 y 18.

205. — ¿Puede formarse una proporción aritmética con los números : 12, 17, 14 y 9?

206. — Encontrar el término desconocido de las proporciones :

$$\begin{array}{rcl} 7 & . & 5 : 9 . x \\ 3 & . & 12 : x . 16 \\ 15 & . & x : 24 . 36 \\ x & . & 9 : 13 . 4 \end{array}$$

207. — Escribir una proporción aritmética cuya primera razón sea 4. $\frac{2}{3}$.

208. — Escribir una proporción aritmética cuya primera razón sea 0.25. $\frac{1}{4}$

209. — Escribir una proporción aritmética continua cuya primera razón sea 9. 3.

210. — Escribir una proporción aritmética continua cuya primera razón sea 3.18.

211. — Escribir una proporción aritmética continua cuya primera razón sea 2. $\frac{7}{9}$

212. — Buscar un medio aritmético entre los números 7 y 15.

213. — ¿Cuál es el medio aritmético de los números 3 y 12?

214. — Escribir una proporción geométrica cuya primera razón sea 9 : 12

215. — Escribir varias proporciones geométricas cuya primera razón sea 48 : 12

216. — Formar una proporción geométrica con los números 21, 7, 3 y 9.

217. — Formar una proporción geométrica con los números : 5, 35, 12 y 84.

218. — ¿Puede formarse una proporción geométrica con los números 4, 8, 12 y 24?

219. — Encontrar el término desconocido de las proporciones :

$$12 : 9 :: 27 : x$$

$$7 : 3 :: 21 : x$$

$$14 : x :: 16 : 28$$

$$x : 10 :: 6 : 12$$

220. — Escribir una proporción geométrica cuya primera razón sea $9 : \frac{2}{3}$.

221. — Escribir varias proporciones geométricas cuya primera razón sea : $0,75 : \frac{3}{8}$.

222. — Escribir una proporción geométrica continua cuya primera razón sea 9 : 8.

223. — Escribir una proporción geométrica continua cuya primera razón sea $3 : \frac{5}{6}$.

224. — Escribir una proporción geométrica continua cuya primera razón sea $\frac{3}{8} : \frac{5}{9}$.

225. — Buscar un medio geométrico continuo entre los números 4 y 9.

226. — ¿Cuál es el medio geométrico continuo entre los 3 y $\frac{64}{3}$?

227. — Hallar un medio geométrico entre los números 5 y 21.

228. — Ejecutar en la proporción

$$7 : 15 :: 28 : 60$$

las transformaciones de alternar, y dividir.

229. — Ejecutar en la proporción

$$27 : 6 : 9 : 2$$

las transformaciones de invertir y componer.

PROGRESIONES

PROGRESIÓN ARITMÉTICA

432. — **Progresión** es una serie de números que guardan, cada uno, con el que le precede ó sigue, la misma relación, que se llama razón.

433. — La progresión se divide en *progresión aritmética ó por diferencia*, y *progresión geométrica ó por cociente*.

434. — **Progresión aritmética** es una serie de números que *crecen ó decrecen*, término á término, la misma cantidad. Tales son las dos series de números 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, etc., y 23, 20, 17, 14, 11, 8, etc.

435. — Para indicar que estos números se hallan en progresión aritmética, se les antepone el signo ($\div$), que se lee *como*, y se separan por un punto que se lee *es á*. EJEMPLO :

$$\div 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21 \cdot$$

y se lee : como 3 es aritméticamente á 5, es á 7, es á 9, etc.

436. — *En toda progresión aritmética la suma de los extremos es igual á la de dos términos cualesquiera equidistantes de ellos.*

437. — *Para encontrar la suma, la razón ó cualquiera de los términos de una progresión aritmética se emplean las siguientes fórmulas en las cuales : n , representa el número de términos; a , el primero; l , el último; r , la razón, y la s , la suma¹.*

Para encontrar el primer término : $a = l - (n - 1)r$.

Para el último término : $l = a + (n - 1)r$.

Para el número de términos : $n = \frac{l + r - a}{r}$.

Para la razón : $r = \frac{l - a}{n - 1}$.

Para la suma : $s = \frac{(a + l)n}{2}$.

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

438. — **Progresión geométrica** es una serie de números, de los cuales cada uno es igual al que le antecede multiplicado por una cantidad constante, ó al que le sigue dividido por la misma cantidad. Tal es la serie de números : 2, 4, 8, 16, 32, 64; etc.

439. — Para indicar que estos números se hallan en progresión geométrica, se les antepone el signo

1. Véanse en el tercer tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor, las muchas fórmulas suplementarias de la progresión aritmética que allí se encuentran.

($\div\div$), que se lee *como*, y se separan por dos puntos que se leen *es á*. EJEMPLO :

$$\div\div 2 : 4 : 8 : 16 : 32. . . .$$

y se lee : como 2 es geométricamente á 4, es á 8, es á 16, es á 32, etc.

440. — *En toda progresión geométrica el producto de los extremos es igual al de dos términos cualesquiera equidistantes de ellos.*

441. — *Para encontrar cualquiera de los términos de una progresión geométrica se emplean las siguientes fórmulas, cuyas letras significan lo mismo que en progresión aritmética, excepto q , que significa la razón¹.*

Para encontrar el *primer término* : $a = \frac{l}{q^{n-1}}$.

Para el *último término* ² : $l = aq^{n-1}$.

Para la *razón* : $q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$.

Para la *suma* : $s = \frac{lq - a}{q - 1}$.

Cuestionario.

¿ Qué es progresión? 432. — ¿ En qué se divide la progresión? 433. — ¿ Qué cosa es progresión aritmética? 434. — ¿ Como se

1. Véanse en el tercer tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor, las fórmulas suplementarias de la progresión geométrica que allí se encuentran.

2. En las letras puestas unas á continuación de otras, queda sobreentendido el signo $\times$

escribe la progresión aritmética? 435. — ¿A qué es igual la suma de los extremos de una progresión aritmética? 436. — ¿Cuál es la fórmula que sirve para encontrar el primer término de una progresión aritmética? 437. — ¿Con qué fórmula se encuentra el último término de una progresión aritmética? 437. — ¿Qué fórmula sirve para encontrar el número de términos de una progresión aritmética? 437. — ¿Con qué fórmula se determina la razón en una progresión aritmética? 437. — ¿Cuál es la fórmula para encontrar la suma de los términos de la progresión aritmética? 437. — ¿Qué es la progresión geométrica? 438. — ¿Cómo se escribe la progresión geométrica? 439. — ¿A qué es igual el producto de los extremos de una progresión geométrica? 440. — ¿Cuál es la fórmula que sirve para encontrar el primer término de una progresión geométrica? 441. — ¿Con qué fórmula se encuentra el último término de la progresión geométrica? 441. — ¿Cuál es la fórmula que sirve para encontrar la razón? 441. — ¿A qué es igual la suma de los términos de la progresión geométrica? 441.

Ejercicios y problemas sobre las progresiones.

230. Encontrar el 22° término de la progresión aritmética :

$$\div 5.9.13.17.....$$

231. — ¿Cuál es el primer término de una progresión aritmética cuyo último término es 53, el número de términos 13 y la razón 4?

232. — Encontrar la suma de los términos de una progresión aritmética cuyo primer término es 12, el último 84 y el número de términos 25.

233. — Encontrar el número de términos de una progresión aritmética conociendo el primer término 7, el último 133 y la razón 6.

234. — Encontrar el primer término de una progresión aritmética en que se conoce el número de términos 25, el último término 84 y la suma 1200.

235. — Encontrar el 13° término de una progresión geométrica cuyo primer término es 2 y la razón 3.

236. — ¿Cuál es la suma de los términos de una progresión geométrica en que se conoce $a = 2$, $9 = 3$ y $l = 13122$?

LOGARITMOS

442. — **Logaritmos** son los términos de una progresión aritmética cuyo primer término es cero, que corresponde respectivamente á los de una progresión geométrica, cuyo primer término es 1.

EJEMPLO :

logaritmos	÷	0	.	1	.	2	.	3	.	4	.	5	.	6
número	÷	1	:	10	:	100	:	1000	:	10000	:	100000	:	1000000

443. — Defínense también los logaritmos diciendo que son las *diferentes potencias á que debe elevarse una cantidad constante, que se llama base, para producir un número dado*; por ejemplo, en la expresión : $2^3=8$, el exponente 3 es el logaritmo de 8, porque es la potencia á que debe elevarse 2 para producir 8, y cuando decimos $3^4=81$, 4 es el logaritmo de 81, porque es la potencia á que debe elevarse 3 para producir 81.

444. — La **base** del sistema de *logaritmos vulgares*, generalmente usado, es el número **10**; por lo tanto en las expresiones : $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000$, etc., el logaritmo de 10 es 1, el de 100

es 2, el de 1000 es 3, etc., y los logaritmos de los números *de una* cifra serán *cero*, más una fracción decimal; los de *dos* cifras, serán *uno*, más una fracción decimal, etc.

445. — A la *parte entera* del logaritmo de un número se llama *característica* y á la *parte decimal* *mantisa*.

446. La **característica** del logaritmo de un número *entero*, ó *compuesto de enteros y decimales*, consta de tantas unidades como cifras enteras tiene el número, *menos una*.

447. — La característica del logaritmo de una *fracción decimal* es *negativa*, y consta de tantas unidades como ceros hay después de la coma, *más uno*.

REGLA PARA ENCONTRAR EL LOGARITMO DE UN NÚMERO

448. **1^{er} Caso.** — *Cuando el número dado es entero y menor que 1200*, se busca su característica, conforme á la regla dada; y su mantisa será la cantidad que se halle al lado de él en las tablas. Por ejemplo, si se quiere el logaritmo del número 754 : su característica es 2, y en las tablas ¹, al lado del número 754, se encuentra la mantisa 877 371, luego

$$\text{logaritmo } 754 = 2,877371.$$

449. **2^o Caso.** — *Cuando el número dado*

1. Véanse las tablas de logaritmos del autor.

consta de enteros y decimales, y el número que resulta, prescindiendo de la coma es menor que 1200, se busca su característica, y su mantisa será la misma que la del número que resulte si se prescinde de la coma. Por ejemplo, si se busca el logaritmo de 4,25, su característica es 0 y la mantisa de 425 es 628 389, luego

$$\text{logaritmo } 4,25 = 0,628\ 389.$$

450. 3^{er} Caso. — *Cuando el número dado, ó que resulte de prescindir de la coma es mayor que 1200*, se separan con una coma decimal, contando de derecha á izquierda las cifras que sean necesarias para dejar á la izquierda de la coma un número menor que 1200, se busca la mantisa del logaritmo de ese número, y se resta de la que está abajo de ella en las tablas; se multiplica esta diferencia por las cifras decimales separadas, se suma *la parte entera* de este producto con la primera mantisa encontrada y la suma será *la mantisa* del logaritmo buscado. Por ejemplo, si se quiere el logaritmo de 82745, su característica es 4. Separando las dos últimas cifras de la derecha, queda 827,45. La mantisa de 827 en las tablas es 917 506; la que se encuentra debajo de ella es 918 030, la diferencia entre las dos es 524, que multiplicado por 0,45 da 235,80. Sumando 236 con la primera mantisa se obtiene 917 742 que será la mantisa buscada; luego

$$\text{logaritmo } 82745 = 4,917\ 742.$$

451. 4º Caso. — *Cuando el número propuesto es una fracción decimal se busca su característica conforme á la regla dada, y su mantisa será la que corresponda al número que resulte prescindiendo de la coma. Por ejemplo, si se busca el logaritmo de 0,000475, su característica es -4 y la mantisa de 475 es 676694, luego*

$$\text{logaritmo } 0,000475 = \bar{4},676694^1.$$

**PARA ENCONTRAR EL NÚMERO Á QUE
CORRESPONDE UN LOGARITMO**

452. 1º Caso. — *Cuando la mantisa se halla exactamente en las tablas, el número á que corresponde es el que está á la izquierda en la columna N; debiendo observar que si la característica del logaritmo dado es positiva, el número á que corresponde deberá tener tantas cifras enteras como unidades tenga la característica más uno; pero si es negativa, el número á que corresponde debe ser una fracción decimal que debe tener, entre la coma y la parte decimal, tantos ceros como unidades tenga la característica menos uno. EJEMPLO :*

$$1,076640 = \text{logaritmo } 11,93 \quad \text{y}$$

$$\bar{4},970812 = \text{logaritmo } 0,000935.$$

453. 2º Caso. — *Cuando la mantisa no se*

1. Se escribe el signo menos encima de la característica para indicar que sólo ella es negativa, permaneciendo positiva la mantisa.

encuentra exactamente en las tablas se busca la próxima menor y se resta de la propuesta, dividiendo esta diferencia por la diferencia entre la mantisa hallada y la próxima siguiente. Las cifras del cociente se colocan *en seguida* del número á que corresponde la mantisa próxima menor que la propuesta, en cuyo resultado se separan con una coma decimal, contando de izquierda á derecha, tantas cifras como unidades tenga la característica *más uno*. Por ejemplo, si se busca el número á que corresponde el logaritmo 1,21617 en la columna: log. hallaremos: 204120, que restado de 21617 da 1205 por diferencia. Dividiendo 1205 por 2633, diferencia entre la mantisa hallada y 23,054, se obtiene: 0,45 de cociente. Colocando la parte decimal, 45 á continuación del 16, número á que corresponde la mantisa hallada, se tiene 1645. Separando, por último, dos cifras de izquierda á derecha, se tiene: $1,2167 = \log 16,45$.

454. — *Si la característica es negativa*, el número á que corresponde el logaritmo es una *fracción decimal* que debe tener, entre la coma y la primera cifra significativa, *tantos ceros* como unidades tenga la característica *menos uno*. EJEMPLO:

$$\bar{5},61236 = \log. 0,00004096.$$

PROPIEDADES Y APLICACIONES DE LOS LOGARITMOS

455. — *Los logaritmos tienen las siguientes propiedades que sirven para abreviar y facilitar los cálculos:*

1ª Para multiplicar dos ó más números, *se suman sus logaritmos*, y el número á que corresponde esta suma será el producto. EJEMPLO :

Multiplicar por logaritmos los números 192 y 27.

$$\begin{aligned}\log. (192 \times 27) &= \log. 192 + \log. 27 \\ \log. 192 &= 2,28330 \\ + \log. 27 &= 1,43136 \\ \hline &3,71466 = \log. 5184\end{aligned}$$

2ª Para dividir un número por otro, *se resta del logaritmo del dividendo el del divisor*, y el número á que corresponde la resta será el cociente.

EJEMPLO :

Dividir 5184 entre 192

$$\begin{aligned}\log. \frac{5184}{192} &= \log. 5184 - \log. 192 \\ \log. 5184 &= 3,71467 \\ - \log. 192 &= 2,28330 \\ \hline &1,43137 = \log. 27.\end{aligned}$$

3ª Para elevar un número á una potencia cualquiera, *se multiplica su logaritmo por el exponente de la potencia*, y el número á que corresponda este producto será la potencia pedida. EJEMPLO :

Elevar al cubo el número 12

$$\begin{aligned}\log. 12^3 &= 3 \times \log. 12 \\ \log. 12 &= 1,07918 \\ &\times \quad \quad 3 \\ \hline &3,23754 = \log. 1728.\end{aligned}$$

4ª Para extraer la raíz de una cantidad, se *divide* el logaritmo de la cantidad por el índice de la raíz, y el número á que corresponda el cociente será la raíz pedida. EJEMPLO :

$$\log. \sqrt[3]{1728} = \frac{\log. 1728}{3} = \frac{3.23754}{3} = 1.07918 = \log. 12.$$

Cuestionario.

¿ Qué son logaritmos? 442. — ¿ De qué otro modo se definen los logaritmos? 443. — ¿Cuál es la base del sistema de logaritmos vulgares? 444. — ¿ A qué es igual la característica del logaritmo de un número? 446. — ¿ A qué se llama característica? 445. — ¿ Qué cosa es mantisa? 445. — ¿ Cómo se encuentra el logaritmo de un número entero menor que 1200? 448. — ¿ Cómo se encuentra el logaritmo de un número compuesto de enteros y decimales y menor que 1200? 449. — ¿ Cómo se encuentra el logaritmo de un número mayor que 1200? 450. — ¿ Cómo se encuentra el logaritmo de una fracción decimal? 451. — ¿ Cómo se encuentra el número á que corresponde un logaritmo? 452. — ¿ Cómo se encuentra el número á que corresponde un logaritmo cuando la mantisa no se halla exactamente en las tablas? 453. — ¿ A qué número corresponde un logaritmo cuya característica es negativa? 454. — ¿ Cuáles son las principales propiedades y aplicaciones de los logaritmos? 455. — ¿ Cómo se resuelven por logaritmos las operaciones de multiplicar, dividir, elevación á potencias y extracción de raíces? 455.

TABLA DE LOGARITMOS

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
2	301030	40	602060	77	886491
3	477121	41	612784	78	892095
4	602060	42	623249	79	897627
5	698970	43	633468	80	903090
6	778151	44	643453	81	908485
7	845098	45	653213	82	913814
8	903090	46	662758	83	919078
9	954243	47	672098	84	924279
11	041393	48	681241	85	929419
12	079181	49	690196	86	934498
13	113943	50	698970	87	939519
14	146128	51	707570	88	944483
15	176091	52	716003	89	949390
16	204120	53	724276	90	954243
17	230449	54	732394	91	959041
18	255273	55	740363	92	963788
19	278754	56	748188	93	968483
20	301030	57	755875	94	973128
21	322219	58	763428	95	977724
22	342423	59	770852	96	982271
23	361728	60	778151	97	986772
24	380211	61	785330	98	991226
25	397940	62	792392	99	995635
26	414973	63	799341	101	004321
27	431364	64	806180	102	008600
28	447158	65	812913	103	012837
29	462398	66	819544	104	017033
30	477121	67	826075	105	021189
31	491362	68	832509	106	025306
32	505150	69	838849	107	029384
33	518514	70	845098	108	033424
34	531479	71	851258	109	037427
35	544068	72	857333	110	041393
36	556303	73	863323	111	045323
37	568202	74	869232	112	049218
38	579784	75	875061	113	053078
39	591065	76	880814	114	056905

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
115	060698	154	187521	193	285557
116	064458	155	190332	194	287802
117	068186	156	193125	195	290035
118	071882	157	195900	196	292256
119	075547	158	198657	197	294466
120	079181	159	201397	198	296665
121	082785	160	204120	199	298853
122	086360	161	206826	200	301030
123	089905	162	209515	201	303196
124	093422	163	212188	202	305351
125	096910	164	214844	203	307496
126	100371	165	217484	204	309630
127	103804	166	220108	205	311754
128	107210	167	222716	206	313867
129	110590	168	225309	207	315970
130	113913	169	227887	208	318063
131	117271	170	230449	209	320146
132	120574	171	232996	210	322219
133	123852	172	235528	211	324282
134	127105	173	238046	212	326336
135	130334	174	240549	213	328380
136	133539	175	243038	214	330414
137	136721	176	245513	215	332438
138	139879	177	247973	216	334454
139	143015	178	250420	217	336460
140	146128	179	252853	218	338456
141	149219	180	255273	219	340444
142	152288	181	257679	220	342423
143	155336	182	260071	221	344392
144	158362	183	262451	222	346353
145	161368	184	264818	223	348305
146	164353	185	267172	224	350248
147	167317	186	269513	225	352183
148	170262	187	271842	226	354108
149	173186	188	274158	227	356026
150	176091	189	276462	228	357935
151	178977	190	278754	229	359835
152	181844	191	281033	230	361728
153	184691	192	283301	231	363612

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
232	365488	271	432969	310	491362
233	367356	272	434569	311	492760
234	369216	273	436163	312	494155
235	371068	274	437751	313	495544
236	372912	275	439333	314	496930
237	374748	276	440909	315	498311
238	376577	277	442480	316	499687
239	378398	278	444045	317	501059
240	380211	279	445604	318	502427
241	382017	280	447158	319	503791
242	383815	281	448706	320	505150
243	385606	282	450249	321	506505
244	387390	283	451786	322	507856
245	389166	284	453318	323	509203
246	390935	285	454845	324	510545
247	392697	286	456366	325	511883
248	394452	287	457882	326	513218
249	396199	288	459392	327	514548
250	397940	289	460898	328	515874
251	399674	290	462398	329	517196
252	401401	291	463893	330	518514
253	403121	292	465383	331	519828
254	404834	293	466868	332	521138
255	406540	294	468347	333	522444
256	408240	295	469822	334	523746
257	409933	296	471292	335	525045
258	411620	297	472756	336	526339
259	413300	298	474216	337	527629
260	414973	299	475671	338	528917
261	416641	300	477121	339	530200
262	418301	301	478567	340	531479
263	419956	302	480007	341	532754
264	421604	303	481443	342	534026
265	423246	304	482874	343	535294
266	424882	305	484300	344	536558
267	426511	306	485721	345	537819
268	428135	307	487138	346	539076
269	429752	308	488551	347	540329
270	431364	309	489959	348	541579

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
349	542825	388	588832	427	630428
350	544068	389	589950	428	631444
351	545307	390	591065	429	632457
352	546543	391	592177	430	633168
353	547775	392	593286	431	634477
354	549003	393	594393	432	635484
355	550228	394	595496	433	636488
356	551450	395	596597	434	637490
357	552668	396	597695	435	638489
358	553883	397	598791	436	639486
359	555094	398	599883	437	640481
360	556303	399	600973	438	641474
361	557507	400	602060	439	642465
362	558709	401	603144	440	643453
363	559907	402	604226	441	644439
364	561101	403	605305	442	645422
365	562293	404	606381	443	646404
366	563481	405	607455	444	647383
367	564666	406	608526	445	648360
368	565848	407	609594	446	649335
369	567026	408	610660	447	650308
370	568202	409	611723	448	651278
371	569374	410	612784	449	652246
372	570543	411	613842	450	653213
373	571709	412	614897	451	654177
374	572872	413	615950	452	655138
375	574031	414	617000	453	656098
376	575188	415	618048	454	657056
377	576341	416	619093	455	658011
378	577492	417	620136	456	658965
379	578639	418	621176	457	659916
380	579784	419	622214	458	660865
381	580925	420	623249	459	661813
382	582063	421	624282	460	662758
383	583199	422	625312	461	663701
384	584331	423	626340	462	664642
385	585461	424	627366	463	665581
386	586587	425	628389	464	666518
387	587711	426	629410	465	667453

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
466	668386	505	703291	544	735599
467	669317	506	704151	545	736397
468	670246	507	705008	546	737193
469	671173	508	705864	547	737987
470	672098	509	706718	548	738781
471	673021	510	707570	549	739572
472	673942	511	708421	550	740363
473	674861	512	709270	551	741152
474	675778	513	710117	552	741939
475	676694	514	710963	553	742725
476	677607	515	711807	554	743510
477	678518	516	712650	555	744293
478	679428	517	713491	556	745075
479	680336	518	714330	557	745855
480	681241	519	715167	558	746634
481	682145	520	716003	559	747412
482	683047	521	716838	560	748188
483	683947	522	717671	561	748963
484	684845	523	718502	562	749736
485	685742	524	719331	563	750508
486	686636	525	720159	564	751279
487	687529	526	720986	565	752048
488	688420	527	721811	566	752816
489	689309	528	722634	567	753583
490	690196	529	723456	568	754348
491	691081	530	724276	569	755112
492	691965	531	725095	570	755875
493	692847	532	725912	571	756636
494	693727	533	726727	572	757396
495	694605	534	727541	573	758155
496	695482	535	728354	574	758912
497	696356	536	729165	575	759668
498	697229	537	729974	576	760422
499	698101	538	730782	577	761176
500	698970	539	731589	578	761928
501	699838	540	732394	579	762679
502	700704	541	733197	580	763428
503	701568	542	733999	581	764176
504	702431	543	734800	582	764923

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
583	765669	622	793790	661	820201
584	766413	623	794488	662	820858
585	767156	624	795185	663	821514
586	767898	625	795880	664	822168
587	768638	626	796574	665	822822
588	769377	627	797268	666	823474
589	770115	628	797960	667	824126
590	770852	629	798651	668	824776
591	771587	630	799341	669	825426
592	772322	631	800029	670	826075
593	773055	632	800717	671	826723
594	773786	633	801404	672	827369
595	774517	634	802089	673	828015
596	775246	635	802774	674	828660
597	775974	636	803457	675	829304
598	776701	637	804139	676	829947
599	777427	638	804821	677	830589
600	778151	639	805501	678	831230
601	778874	640	806180	679	831870
602	779596	641	806858	680	832509
603	780317	642	807535	681	833147
604	781037	643	808211	682	833784
605	781755	644	808886	683	834421
606	782473	645	809560	684	835056
607	783189	646	810233	685	835691
608	783904	647	810904	686	836324
609	784617	648	811575	687	836957
610	785330	649	812245	688	837588
611	786041	650	812913	689	838219
612	786751	651	813581	690	838849
613	787460	652	814248	691	839478
614	788168	653	814913	692	840106
615	788875	654	815578	693	840733
616	789581	655	816241	694	841359
617	790285	656	816904	695	841985
618	790988	657	817565	696	842609
619	791691	658	818226	697	843233
620	792392	659	818885	698	843855
621	793092	660	819544	699	844477

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
700	845098	739	868644	778	890980
701	845718	740	869232	779	891537
702	846337	741	869818	780	892095
703	846955	742	870404	781	892651
704	847573	743	870989	782	893207
705	848189	744	871573	783	893762
706	848805	745	872156	784	894316
707	849419	746	872789	785	894870
708	850033	747	873321	786	895423
709	850646	748	873902	787	895975
710	851258	749	874482	788	896526
711	851870	750	875061	789	897077
712	852480	751	875640	790	897627
713	853090	752	876218	791	898176
714	853698	753	876795	792	898725
715	854306	754	877371	793	899273
716	854913	755	877947	794	899821
717	855519	756	878522	795	900367
718	856124	757	879096	796	900913
719	856729	758	879669	797	901458
720	857333	759	880242	798	902003
721	857935	760	880814	799	902547
722	858537	761	881385	800	903090
723	859138	762	881955	801	903633
724	859739	763	882525	802	904174
725	860338	764	883093	803	904716
726	860937	765	883661	804	905256
727	861534	766	884229	805	905796
728	862131	767	884795	806	906335
729	862728	768	885361	807	906874
730	863323	769	885926	808	907411
731	863917	770	886491	809	907949
732	864511	771	887054	810	908485
733	865104	772	887617	811	909021
734	865696	773	888179	812	909556
735	866287	774	888741	813	910091
736	866878	775	889302	814	910624
737	867467	776	889862	815	911158
738	868056	777	890421	816	911690

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
817	912222	856	932474	895	951823
818	912753	857	932981	896	952308
819	913284	858	933487	897	952792
820	913814	859	933993	898	953276
821	914343	860	934498	899	953760
822	914872	861	935003	900	954243
823	915400	862	935507	901	954725
824	915927	863	936011	902	955207
825	916454	864	936514	903	955688
826	916980	865	937016	904	956168
827	917506	866	937518	905	956649
828	918030	867	938019	906	957128
829	918555	868	938520	907	957607
830	919078	869	939020	908	958086
831	919601	870	939519	909	958564
832	920123	871	940018	910	959041
833	920645	872	940516	911	959518
834	921166	873	941014	912	959995
835	921686	874	941511	913	960471
836	922206	875	942008	914	960946
837	922725	876	942504	915	961421
838	923244	877	943000	916	961895
839	923762	878	943495	917	962369
840	924279	879	943989	918	962843
841	924796	880	944483	919	963316
842	925312	881	944976	920	963788
843	925828	882	945469	921	964260
844	926342	883	945961	922	964731
845	926857	884	946452	923	965202
846	927370	885	946943	924	965672
847	927883	886	947434	925	966142
848	928396	887	947924	926	966611
849	928908	888	948413	927	967080
850	929419	889	948902	928	967548
851	929930	890	949390	929	968016
852	930440	891	949878	930	968483
853	930949	892	950365	931	968950
854	931458	893	950851	932	969416
855	931966	894	951338	933	969882

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
934	970347	973	988113	1013	005609
935	970812	974	988559	1014	006038
936	971276	975	989005	1015	006466
937	971740	976	989450	1016	006894
938	972203	977	989895	1017	007321
939	972666	978	990339	1018	007748
940	973128	979	990783	1019	008174
941	973590	980	991226	1020	008600
942	974051	981	991669	1021	009025
943	974512	982	992111	1022	009451
944	974972	983	992554	1023	009876
945	975432	984	992995	1024	010300
946	975891	985	993436	1025	010724
947	976350	986	993877	1026	011147
948	976808	987	994317	1027	011570
949	977266	988	994757	1028	011993
950	977724	989	995196	1029	012415
951	978181	990	995635	1030	012837
952	978637	991	996074	1031	013259
953	979093	992	996512	1032	013680
954	979548	993	996949	1033	014100
955	980003	994	997386	1034	014521
956	980458	995	997823	1035	014940
957	980912	996	998259	1036	015360
958	981366	997	998695	1037	015779
959	981819	998	999131	1038	016197
960	982271	999	999565	1039	016616
961	982723	1001	000434	1040	017033
962	983175	1002	000868	1041	017451
963	983626	1003	001301	1042	017868
964	984077	1004	001734	1043	018284
965	984527	1005	002166	1044	018701
966	984977	1006	002598	1045	019116
967	985426	1007	003029	1046	019532
968	985875	1008	003461	1047	019947
969	986324	1009	003891	1048	020361
970	986772	1010	004321	1049	020775
971	987219	1011	004751	1050	021189
972	987666	1012	005181	1051	021603

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
1052	022016	1091	037825	1130	053078
1053	022428	1092	038223	1131	053463
1054	022841	1093	038620	1132	053846
1055	023252	1094	039017	1133	054230
1056	023664	1095	039414	1134	054613
1057	024075	1096	039811	1135	054996
1058	024486	1097	040207	1136	055378
1059	024896	1098	040602	1137	055760
1060	025306	1099	040998	1138	056142
1061	025715	1100	041393	1139	056524
1062	026125	1101	041787	1140	056905
1063	026533	1102	042182	1141	057286
1064	026942	1103	042576	1142	057666
1065	027350	1104	042969	1143	058046
1066	027757	1105	043362	1144	058426
1067	028164	1106	043755	1145	058805
1068	028571	1107	044148	1146	059185
1069	028978	1108	044540	1147	059563
1070	029384	1109	044932	1148	059942
1071	029789	1110	045323	1149	060320
1072	030195	1111	045714	1150	060698
1073	030600	1112	046105	1151	061075
1074	031004	1113	046495	1152	061452
1075	031408	1114	046885	1153	061829
1076	031812	1115	047275	1154	062206
1077	032216	1116	047664	1155	062582
1078	032619	1117	048053	1156	062958
1079	033021	1118	048442	1157	063333
1080	033424	1119	048830	1158	063709
1081	033826	1120	049218	1159	064083
1082	034227	1121	049606	1160	064458
1083	034628	1122	049993	1161	064832
1084	035029	1123	050380	1162	065206
1085	035430	1124	050766	1163	065580
1086	035830	1125	051153	1164	065953
1087	036230	1126	051538	1165	066326
1088	036629	1127	051924	1166	066699
1089	037028	1128	052309	1167	067071
1090	037427	1129	052694	1168	067443

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
1169	067815	1180	071882	1191	075912
1170	068186	1181	072250	1192	076276
1171	068557	1182	072617	1193	076640
1172	068928	1183	072985	1194	077004
1173	069298	1184	073352	1195	077368
1174	069668	1185	073718	1196	077731
1175	070038	1186	074085	1197	078094
1176	070407	1187	074451	1198	078457
1177	070776	1188	074816	1199	078819
1178	071145	1189	075182	1200	079181
1179	071514	1190	075547	1201	079543

REGLA DE TRES

456. — **Regla de tres** es aquella operación que sirve para encontrar un término desconocido que esté en *proporción geométrica* con los términos dados.

457. — Se divide en *simple y compuesta, directa é inversa*.

458. — Se llama **simple** cuando hay *tres* términos conocidos y uno por conocer; y **compuesta** cuando hay *más de tres* términos conocidos y uno por conocer.

459. — Se llama **directa** cuando las cantidades que se tienen que comparar están en *razón directa*; **é inversa**, en caso contrario.

460. — Se llaman **cantidades relativas** en una regla de tres, aquellas que están ligadas entre sí, de tal manera, que el valor de una depende del que se le dé á la otra.

REGLA PARA RESOLVER UN PROBLEMA DE REGLA DE TRES SIMPLE

461. **Planteando la proporción.** — Se forma la primera razón con las cantidades homogéneas

conocidas, de modo que la *relativa á la incógnita* esté como *consecuente* cuando la regla de tres sea *directa*, y como *antecedente* cuando sea *inversa*; la segunda razón se forma con la *homogénea* de la incógnita como consecuente. Se busca el cuarto término de esta proporción y el resultado será lo que se pedía. EJEMPLO :

Dos operarios terminaron una obra en 75 días; ¿en qué tiempo la hubieran terminado 5 operarios?

PLANTEO DEL PROBLEMA

Supuesto. 2 operarios — 75 días.

Pregunta 5 operarios — X —

Proporción. $5 : 2 :: 75 : X = 30$ días.

462. Sin plantear la proporción. — *El valor de la incógnita* es igual á su *homogénea* multiplicada por un quebrado, formado por las cantidades conocidas, en el que la cantidad *relativa á la incógnita* estará como *numerador* cuando la regla de tres sea *directa*, y como *denominador* cuando sea *inversa*.

Resolviendo el problema anterior tendremos :

$$x = 75 \times \frac{2}{5} = 30 \text{ días.}$$

463. Por reducción á la unidad. — Se busca por un fácil raciocinio el valor de *una unidad* de la *relativa de la incógnita*; en seguida con este

valor, y por medio de otro raciocinio, se encontrará lo que se busca. EJEMPLO :

Ocho hombres se mantienen 13 días con una cantidad determinada de víveres. ¿Cuántos días podrán mantenerse 16 hombres con los mismos víveres?

RESOLUCIÓN

Si á 8 hombres les duran los víveres 13 días, á 1 le durará 8 veces más; es decir : $13 \times 8 = 104$ días.

Si á 1 hombre le duran los víveres 104 días, á 16 hombres les durarán 16 veces menos; es decir : $104 \div 16 = 6,5$ días.

REGLA PARA RESOLVER UN PROBLEMA DE REGLA DE TRES COMPUESTA

464. Planteando las proporciones. — Se forman tantas proporciones como términos homogéneos haya, dándoles por tercer término el homogéneo de la incógnita y por cuarto la misma incógnita. Se averigua si las proporciones son *directas* ó *inversas*, y si fueren inversas se pondrá el antecedente en lugar de consecuente y viceversa. Se multiplican ordenadamente estas proporciones, simplificando sus términos previamente, si se puede; se busca el cuarto término de la proporción que resulte, y se tendrá lo que se pedía. EJEMPLO :

Para la construcción de un camino de hierro, 18 hombres han transportado, á la distancia de

6 kilómetros, 1,670 durmientes en 8 días, trabajando 10 horas diarias. ¿Cuántos durmientes transportarán, á la distancia de 7 kilómetros, 16 hombres en 11 días, trabajando 13 horas diarias?

PLANTEO DEL PROBLEMA

Supuesto: 18 hbs. 6 km. 1,670 dts. 8 ds. 10 hs. drs.

Pregunta: 16 — 7 — X — 11 — 13 —

$$\left. \begin{array}{l} 18 : 16 \\ 7 : 6 \\ 8 : 11 \\ 10 : 13 \end{array} \right\} :: 1,670 :: X$$

Proporción: $18 \times 7 \times 8 \times 10 : 16 \times 6 \times 11 \times 13 :: 1,670 : X$
 $10080 : 13728 : 1670 : X$

$$X = \frac{1670 \times 13728}{10080} = \frac{22925760}{10080} = 2274 \frac{384}{1008}$$

465. Sin plantear las proporciones. — El valor de la incógnita es igual á su homogénea multiplicada por un quebrado, formado por el producto de las cantidades conocidas, en el que las cantidades *relativas* á la incógnita estarán como *numerador* cuando la proporción sea directa, y como *denominador* cuando sea *inversa*.

Resolviendo el problema anterior, tendremos :

$$x = 1670 \times \frac{16 \times 6 \times 11 \times 13}{18 \times 7 \times 8 \times 10} = 2274 \frac{384}{1008}$$

466. Por reducción á la unidad. — Se considera el problema descompuesto en tantas reglas de tres simples, como términos homogéneos haya,

y aplicando sucesivamente en cada una la regla dada (463) se tendrá el valor de la incógnita.

EJEMPLO :

Seis hombres consumen 10 kilogramos de pan en ocho días. ¿En qué tiempo podrán consumir 60 kilogramos doce hombres?

RESOLUCIÓN

Si 6 hombres acaban el pan en 8 días, un hombre lo acabará en $8 \times 6 = 48$ días.

Si un hombre lo acaba en 48 días, 12 hombres lo acabarán en $48 \div 12 = 4$ días.

Si para consumir 10 kilogramos se tardan 4 días, para consumir 1 se tardarán $\frac{4}{10}$ días.

Si para consumir un kilogramo se tardan $\frac{4}{10}$ días, para consumir 60 kilogramos se tardarán $60 \times \frac{4}{10} = 24$ días¹.

Cuestionario.

¿Qué cosa es regla de tres? 456. — ¿En qué se divide la regla de tres? 457. — ¿Qué es regla de tres simple? 458. — ¿Qué es regla de tres compuesta? 458. — ¿A qué se llama regla de tres directa? 459. — ¿A qué se llaman cantidades relativas en una regla de tres? 460. — ¿Cómo se resuelve un problema de regla de tres simple? 461. — ¿De qué otro modo se puede resolver un problema de regla de tres simple? 462 y 463. — ¿Cómo se resuelve la regla de tres compuesta? 464? — ¿De qué otro modo se puede resolver un problema de regla de tres compuesta? 465 y 466.

1. Véase el tercer tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor.

Problemas sobre la regla de tres.

237. — En una imprenta una rotativa imprime, corta y cuenta en una hora 40000 ejemplares de un periódico; Cuántos ejemplares se obtendrán si la máquina funciona durante 75 minutos?

RESOLUCIÓN. — *Por proporción.* — Si en 60 minutos se imprimen 40000 ejemplares, en 75 minutos, que son más, se imprimirán más ejemplares. Vamos á buscar más, luego pondremos por primer término la menor de las homogéneas y tendremos la proporción :

$$60 : 75 : 40000 : x.$$

Buscando el cuarto término de esta proporción, tendremos :

$$x = \frac{75 \times 40000}{60} = 50000 \text{ ejemplares.}$$

Por reducción á la unidad. — Si en 60 minutos se imprimen 40000 ejemplares, en 1 minuto se imprimirán 60 veces menos, esto es $\frac{40000}{60}$.

Si en 1 minuto se imprimen $\frac{40000}{60}$ ejemplares, en 75 minutos se imprimirán 75 veces más, esto es $\frac{40000}{60} \times 75 = 50000$ ejemplares.

Explicar del mismo modo :

238. — Para vestir á 18 hombres se necesitaron 58^m.50 de paño; Cuántos metros se necesitarán para vestir á 50 hombres?

239. — 36 metros de tela cuestan 549 pesos; Cuánto costarán 318^m.75?

240. — 5 albañiles hicieron en 25 días 375 metros de una obra; Cuántos metros harán 45 albañiles en 10 días?

Resolución. — Si 5 albañiles hacen 375 metros, 1 albañil hará 5 veces menos, es decir, $375 \div 5 = 75$ metros.

Si un albañil hace 75 metros, 45 albañiles harán 45 veces 75, es decir $75 \times 45 = 3375$ metros.

Si en 25 días hacen 3375 metros, en 1 día harán 25 veces menos, es decir, $3375 \div 25 = 135$ metros.

Si en 1 día hacen 135 metros, en 10 días harán 10 veces más, esto es $135 \times 10 = 1350$ metros.

241. — 20 obreros, trabajando 10 horas diarias levantaron 1500 metros cúbicos de tierra en 15 días; Cuántos metros cúbicos levantarán 67 obreros en 23 días, trabajando 11 horas diarias?

REGLA DE COMPAÑÍA

467. — **Regla de compañía** es la operación que sirve para encontrar la utilidad ó pérdida que á cada asociado le corresponda *proporcionalmente* al capital que haya puesto para algún negocio.

468. — Se divide en *simple* y *compuesta*.

Es **simple** cuando los capitales permanecen *un mismo tiempo* en el fondo, y **compuesta** cuando permanecen *distintos tiempos*.

470. — **Para resolver un problema de compañía simple** se suman los capitales de los socios, y con esta suma, la ganancia ó pérdida total, y el capital de cada uno, se forman tantas proporciones como socios haya, y el cuarto término de cada una expresará lo que corresponde á cada socio.

471. — Puede resolverse un problema de *compañía simple*, **sin plantear las proporciones**, teniendo presente que *la parte correspondiente á cada socio es igual al capital de cada uno multiplicado por un quebrado que tiene por numerador la ganancia ó pérdida total, y por denominador la suma de las puestas de los socios*.

472. — **Para resolver un problema de compañía compuesta**, se multiplican los capitales por sus tiempos, se suman estos productos, y con esta suma, la ganancia ó pérdida total y el producto

de cada capital por su tiempo, se forman tantas proporciones como socios haya, y el cuarto término de dichas proporciones expresará lo que le corresponda á cada socio.

473. — Puede resolverse un problema de *compañía compuesta sin plantear las proporciones*, teniendo presente que *la parte correspondiente á cada socio es igual al producto de cada capital por su tiempo, multiplicado por un quebrado que tiene por numerador la ganancia y pérdida total, y por denominador la suma de los mismos productos*.

474. — Cuando se trata de **dividir una cantidad en partes proporcionales** á ciertos números dados, esta operación recibe el nombre de **Regla de partición** y se resuelve como la regla de compañía, sustituyendo por los capitales de los socios los números dados, y por la ganancia ó pérdida total, la cantidad propuesta¹.

Cuestionario.

¿Qué es regla de compañía? 467. — ¿En qué se divide la regla de compañía? 468. — ¿A qué se llama regla de compañía simple y á qué compuesta? 469. — ¿Cómo se resuelve un problema de compañía simple? 470. — ¿De qué otro modo se puede resolver un problema de compañía simple? 471. — ¿Cómo se resuelve un problema de compañía compuesta? 472. — ¿De qué otro modo se resuelve un problema de compañía compuesta? 473. — ¿Qué es regla de partición y cómo se resuelve? 474.

1. Véase el tercer tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor.

REGLA DE INTERÉS

475. — **Regla de interés**, es la que sirve para encontrar lo que produce una cantidad de dinero impuesta ó prestada con ciertas condiciones.

476. — La cantidad que se presta ó impone se llama **capital**, lo que este capital produce se llama **rédito**, y el número de años, meses ó días que el capital dura impuesto, **tiempo**.

477. — **Tanto por ciento ó interés**, es el rédito de 100 pesos, el cual puede ser mayor ó menor, considerándose, sin embargo, como *legal* el interés de 6 % anual.

478. — Hay dos clases de interés, *simple* y *compuesto*.

479. — **Interés simple** es aquel en que sólo el capital produce rédito; y **compuesto** aquel en que los réditos se unen al capital, al cabo de cierto tiempo, para producir nuevos réditos.

INTERÉS SIMPLE

480. **1.^o Caso.** — En el primer caso de interés simple, se pueden presentar cuatro cuestiones dis-

tintas, según que se busque el *rédito*, el *capital*, el *interés*, ó el *tiempo*; resolviéndose cualquiera de ellas por medio de la regla de tres, por reducción á la unidad ó por medio de las siguientes fórmulas :

$$\text{Para hallar el } \mathbf{rédito} \dots\dots r = \frac{cit}{100}.$$

$$\text{Para hallar el } \mathbf{capital} \dots\dots c = \frac{100r}{it}.$$

$$\text{Para hallar el } \mathbf{interés} \dots\dots i = \frac{100r}{ct}.$$

$$\text{Para hallar el } \mathbf{tiempo} \dots\dots t = \frac{100r}{ci}.$$

En estas fórmulas, r representa el *rédito*, c el *capital*, i el *interés* y t el *tiempo*.

481. — Si el tiempo de que se trata está expresado en *meses* ó *días*, se reduce á *fracción común de año* y se emplean las mismas fórmulas.

482. — El *rédito* de cualquier cantidad en **un año**, puede obtenerse *abreviadamente* en los siguientes casos :

I. — Si el *interés* es 1%, el *rédito* es la centésima parte del *capital*; si es el 5%, la 20ª parte; si es el 10%, la 10ª parte; si el 20%, la 5ª parte; si el 25%, la 4ª, y si el 50%, la mitad.

II. — Para hallar el *rédito* de una cantidad al 6% anual en cualquier número de meses, se multiplica el *capital* por la mitad del número de meses, y el producto se divide por 100.

483. 2º Caso. — Cuando se tiene que pagar

anual ó mensualmente una cantidad fija, causando los pagos que dejen de hacerse algún tanto por ciento, para saber lo que se debe al cabo de cierto tiempo por rentas y réditos á *interés simple*, se hace uso de la fórmula siguiente :

$$S = tR \left(1 + \frac{(t-1)i}{200} \right).$$

En esta fórmula, S representa la suma de las rentas y réditos, R la renta mensual ó anual que debe pagarse, t el número de meses ó años que deje de pagarse, é i el interés¹.

INTERÉS COMPUESTO

484. **1^{er} Caso.** — En el primer caso de interés compuesto se pueden presentar cuatro cuestiones distintas, según que se busque el *monto del capital y los réditos*, el *capital*, el *interés* ó el *tiempo*.

Para hallar la **suma del capital y los réditos**

$$s = cq^t$$

Para hallar el **capital**

$$c = \frac{s}{q^t}$$

Para hallar el **tiempo**

$$t = \frac{\log. s - \log. c}{\log. q}$$

Para hallar el **interés**

$$i = \left(\sqrt[t]{\frac{s}{c}} - 1 \right) 100.$$

1. Véanse en el tercer tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor, muchas fórmulas suplementarias para la resolución del interés simple.

485. 2° Caso. — Cuando hay que pagar una renta cada año, para saber lo que se debe al cabo de cierto tiempo por las sumas de las rentas y los réditos á *interés compuesto*, se hace uso de la fórmula siguiente :

$$s = \frac{R(q^t - 1)}{q - 1}.$$

En estas fórmulas, s representa la suma del capital y los réditos, c el capital, i el interés, t el tiempo ¹ y

$$q = \frac{100 + i}{100}.$$

Cuestionario.

¿Qué es regla de interés? 475. — ¿A qué se llama capital, á qué réditos y á qué tiempo? 476. — ¿Qué cosa es tanto por ciento ó interés, y qué tipo se considera como legal? 477. — ¿Cuántas clases de interés se conocen? 478. — ¿A qué se llama interés simple y á qué compuesto? 479. — ¿Cuántas cuestiones se pueden presentar en el primer caso de interés simple y cómo se resuelve cada una de ellas? 480. — ¿Cuál es la fórmula que sirve para hallar el rédito? 480. — ¿Cuál es la fórmula del interés? — ¿Cuál es la fórmula del tiempo? — ¿Cómo se resuelven los problemas de interés cuando el tiempo está expresado en meses ó días? 481. — ¿En qué casos puede abreviarse un problema de interés simple? 482. — ¿Cómo se resuelve un problema del segundo caso de interés simple? 483. — ¿Con qué fórmulas se resuelve el primer caso de interés compuesto? 484. — ¿Con qué fórmula se resuelve el segundo caso de interés compuesto? 485.

1. Véase el tercer tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor.

ANUALIDADES

486. — Se llama **anualidad**, la *renta anual fija* que recibe por determinado tiempo la persona que impone un capital á cierto interés, y cuya renta se va *rebajando* del capital y sus réditos hasta quedar *completamente amortizado* al cabo del tiempo estipulado.

487. — **Para determinar el capital** que necesita imponerse á un tanto por ciento para poder disfrutar por determinado tiempo de una anualidad fija, se hace uso de la fórmula siguiente¹ :

$$C = \frac{R(q^t - 1)}{q^t(q - 1)}.$$

Cuestionario.

¿Qué cosa es anualidad? 486. — ¿Con qué fórmulas se resuelven los problemas de anualidades? 487.

1. Véase el tercer tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor.

REGLA DE DESCUENTO

488. — Se llama **descuento** el *rebajo* que se hace en una cantidad de dinero pagada antes del tiempo estipulado.

489. — El descuento puede considerarse de *dos maneras* : ó suponiendo que el *capital* se reduce al *capital, menos el descuento*; ó suponiendo que el *capital, más el descuento*, se reducen al *capital*. En el primer caso se llama **descuento exterior**, en el segundo **interior**.

490. — El **descuento exterior** se calcula rebajando del capital expresado su rédito conforme á la fórmula

$$d = \frac{Cit}{100}.$$

EJEMPLO :

¿Cuál es el descuento *exterior* al 5% de una libranza de \$ 15,000 que se paga 6 meses antes de su plazo?

$$d = \frac{15000 \times 5 \times \frac{6}{12}}{100} = 150 \times 5 \times \frac{6}{12}$$

$$d = 750 \times \frac{6}{12} = 375\$.$$

Valor de la letra . . . $15000 - 375 = 14625 \$$.

491. — **El descuento interior se calcula** multiplicando el capital por 100, y dividiendo el producto por 100, más el interés de 100 en el tiempo que falte para el vencimiento del pago; lo que equivale á emplear la fórmula siguiente :

$$V = \frac{100 c}{100 + i}$$

El valor de i se encuentra multiplicando el tiempo por el tanto por ciento dado, y diviendo el producto por 12 ó por 360, según que el tiempo se haya enunciado en meses ó días. EJEMPLO ¹ :

¿Cuál es el descuento *interior* al 5 0/0 anual de una libranza de \$15,000 que se paga 6 meses antes de su plazo?

Interés de \$100 al 5 0/0 anual en seis meses :

$$i = \frac{6 \times 5}{12 \text{ meses}} = \frac{30}{12} = 2,5 \text{ p. } 100$$

$$D = \frac{15000 \times 100}{1025} = \frac{1500000}{1025} = \$ 14634,15.$$

Cuestionario.

¿Qué cosa es descuento? 488. — ¿En qué se divide el descuento, y cómo es define cada uno de los descuentos? 489. — ¿Cómo se calcula el descuento exterior? 490. — ¿Cómo se calcula el descuento interior? 491.

1. Véase el tercer tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor.

REGLA DE ALIGACIÓN

492. — **Regla de aligación**, es la que sirve para encontrar *el precio medio* de la mezcla de dos ó más objetos que tengan distintos precios, ó bien para averiguar la *mezcla* que debe hacerse de objetos de distinto precio, para vender á un precio medio.

493. — **Para encontrar el precio medio** de la mezcla de dos ó más objetos de distinto precio, se multiplican las cantidades por sus precios, se suman estos productos y la suma se divide por la suma de las cantidades, lo que equivale á hacer uso de la fórmula siguiente :

$$m = \frac{cp + c'p' + c''p''}{c + c' + c''}.$$

En esta fórmula, m representa el precio medio que se busca; c , c' y c'' las diversas cantidades que se mezclan y p , p' y p'' sus respectivos precios.

494. — Si hubiese una *ganancia ó pérdida que considerar*, se agregará á la suma de los productos.

495. — **Para determinar la mezcla** que

debe hacerse de objetos de distintos precios para vender á un precio medio, se toman de dos en dos las cantidades que representan los precios, cuidando que una sea *mayor* y otra *menor* que el precio medio; se comparan con éste, y la diferencia entre el precio medio y la *mayor* y se coloca al lado de la *menor*; y la diferencia entre el precio medio y la *menor* se coloca al lado de la *mayor*, siendo los resultados, la mezcla que debe hacerse para vender al precio medio dado.

496. — Si después de resuelto un problema del segundo caso de aligación, se quiere formar *una cantidad determinada de mezcla*, basta dividir esta cantidad en partes proporcionales á las porciones obtenidas, por medio de la regla de *partición*.

497. — Si se quiere que éntre *determinada cantidad de una de las clases*, una simple proporción conducirá al resultado.

498. — Para hallar el **promedio** de varias cantidades, se suman éstas y la suma se divide por el número de cantidades.

499. — Para hallar el **plazo común** de varios pagarés de distinto vencimiento, se multiplica el valor de cada uno por su respectivo plazo, se suman estos productos y la suma se divide por la suma de los valores; el cociente señalará el plazo medio que se busca ¹.

1. Véase el tercer tomo de la *Coleccion de Problemas de Aritmética* del autor.

Cuestionario.

¿Qué cosa es regla de aligación? 492. — ¿Cuál es la fórmula que sirve para hallar el precio medio? 493. — ¿Qué debe hacerse cuando hay alguna ganancia ó pérdida que considerar? 494. — ¿Cómo se determinan las porciones que deben mezclarse de cada efecto para vender á un precio medio? 495. — ¿Qué debe hacerse cuando se quiere formar una cantidad determinada de mezcla? 496. — ¿Qué debe hacerse cuando se quiere que éntre determinidada cantidad de una de las clases? 497. — ¿Cómo se resuelve la regla de promedios? 498. — ¿Cómo se resuelve la regla de plazo común? 499.

REGLA DE FALSA POSICIÓN

500. — Regla de **falsa posición** es la que sirve para hallar un número por medio de otro que se supone.

501. — Para resolver los problemas de falsa posición existen los siguientes métodos :

502. — **El método de falsa posición simple ó de una sola suposición.** Para resolverlo, *se supone un número* que tenga las condiciones del problema, se ejecutan con él las mismas operaciones que se harían con el número verdadero si se conociera, y luego se resuelve una regla de tres que diga así : *Si este resultado proviene del número supuesto, el resultado verdadero ¿de qué número pravendrá?* EJEMPLÓ :

Una persona al morir deja las tres cuartas partes de su capital á sus hijos, la novena parte á su criado y \$1,200 para limosnas. ¿ Cuánto dejó?

Conforme á la regla, supondremos que \$36 es el capital que se busca.

Haciendo el reparto, les tocarían \$27 á los hijos, \$4 al criado, y los \$5 restantes á los pobres.

Ahora diremos : si para dar \$5 de limosna se necesitan \$36, para dar \$1,200 ¿cuánto se necesitará?

$$5 : 36 :: 1200 : X = \frac{39 \times 1200}{5} = \frac{43200}{5} = \$6840.$$

COMPROBACIÓN

$\frac{3}{4}$ de \$8640 para los hijos.	\$ 6480
$\frac{1}{9}$ de \$8640 para el criado	960
Para limosnas.	1200
CAPITAL	\$ 8640

503. — **Método de falsa posición compuesta ó de dos falsas suposiciones.** Para resolverlo se supone *primeramente* un número que tenga las condiciones del problema, se ejecutan con él las mismas operaciones que se harían con el verdadero y se busca la diferencia entre el resultado obtenido y el verdadero. Luego se supone un *segundo número* y se repiten con él las mismas operaciones que con el primero. Ahora se multiplica el primer supuesto por el segundo error, y el segundo supuesto por el primer error, se restan estos productos y la diferencia se divide por la diferencia de los errores; lo que equivale á hacer uso de la fórmula siguiente :

$$X = \frac{s e' - s' e}{e' - e}.$$

EJEMPLO :

La guarnición de una plaza se compone de 2,600 hombres, entre los cuales hay 9 veces tantos infantes y 3 veces tantos artilleros como dragones; ¿cuántos hay de cada arma?

RESOLUCIÓN

Si fuese 4 el número de dragones, el de artilleros sería $4 \times 3 = 12$; el de infantes $4 \times 9 = 36$, y el total de la guarnición 52 en vez de 2600; habría, en consecuencia, un error de $2600 - 52 = 2548$.

Si suponemos ahora que el número de dragones es 5, el de artilleros será $5 \times 3 = 15$; el de infantes $5 \times 9 = 45$, y el total 65, en vez de 2600; hay, pues, un error de $2600 - 65 = 2535$.

Substituyendo en la fórmula correspondiente por s y s' los supuestos, y por e y e' los errores, y ejecutando las operaciones indicadas, teniendo presente la observación relativa á los signos (§ 88, 6ª) y además, que cuando el dividendo y el divisor tienen el mismo signo, el cociente llevará el signo +, tendremos :

$$X = \frac{4 \times 2535 - 5 \times 2548}{2535 - 2548} = \frac{10140 - 12740}{-13}$$

$$X = \frac{-2600}{-13} = 200.$$

COMPROBACIÓN

Dragones	200
Artilleros : 3×200 . . .	600
Infantes : 9×200 . . .	1800
	2600 hombres.

504. Método de reducción á la unidad. —

Como en este método, más que de reglas se necesita del *raciocinio*, pondremos los siguientes ejemplos que pueden servir de guía, advirtiendo que *la reducción á la unidad* es aplicable á un gran número de operaciones, como regla de tres simple y compuesta, interés, aligación, etc.

EJEMPLO : 1° Hallar dos números cuya suma sea igual al año de la proclamación de la Independencia de México, y cuya diferencia sea igual al año en que Cristóbal Colón descubriera la América.

RESOLUCIÓN

Si dividiéramos la suma 1810 en dos partes iguales, cada una de las partes sería 905, y se tendría la suma : $905 + 905 = 1810$.

Pero la diferencia $905 - 905 = 0$, en vez de ser 1492.

Si le restamos $\frac{1}{2}$ al primer sumando y se lo agregamos al segundo, el primero se cambiará en

$$905 - \frac{1}{2} = 904 \frac{1}{2}$$

y el segundo en $905\frac{1}{2}$, y en ese caso la suma será :

$$904\frac{1}{2} + 905\frac{1}{2} = 1810 :$$

pero la diferencia será : $905\frac{1}{2} - 904\frac{1}{2} = 1$, en vez de ser 1492.

Si para que la diferencia sea 1 tuve que restar al 905 una mitad, para que sea 1492 tendré que restarle 1492 mitades; ó lo que es lo mismo :

$$\frac{1492}{2} = 746.$$

Restando 746 al primer sumando y agregándoselo al segundo, el primero se cambia en : $905 - 746 = 159$, y el segundo en $905 + 746 = 1651$, cuyos resultados son los mismos que se buscan, puesto que

$$1651 + 159 = 1810 \text{ y } 1651 - 159 = 1492.$$

505. *Observación.* — La resolución de este problema nos enseña que : *conocida la suma y la diferencia de dos cantidades, se puede determinar cada una de ellas : la mayor será igual á la mitad de la suma más la mitad de la diferencia, y la menor igual á la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia.*

EJEMPLO : 2º ¿Cuál es el número que, añadiéndole otro tanto, más la mitad, tercio y cuarto del mismo número, más 1, da por suma 186?

RESOLUCIÓN

Añadir otro tanto, equivale á duplicar, y añadir la mitad, el tercio y el cuarto, equivale á añadir

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} \text{ del número.}$$

Si no le añadiéramos 1, el duplo más los $\frac{31}{21}$ del número, sumarían 185 en vez de 186, es decir, que $2 + \frac{13}{12}$, ó lo que es lo mismo, los $\frac{37}{12}$ del número serían 185.

Si $\frac{37}{12}$ del número suman 185, un doceavo sumará:

$$\frac{185}{37} = 5.$$

Si $\frac{1}{12}$ hace 5, doce doceavos, ó todo el número, hara $5 \times 12 = 60$, que será el número buscado¹.

COMPROBACIÓN

$$60 + 60 + \frac{60}{2} + \frac{60}{3} + \frac{60}{4} = 186.$$

Cuestionario.

¿Qué cosa es regla de falsa posición? 500. — ¿Cuáles son los métodos para resolver la regla de falsa posición simple? 501. — ¿En qué consiste el método por reducción á la unidad? 504. — Conocida la suma y la diferencia de dos cantidades, ¿cómo se determina cada una de ellas? 505. — ¿Cómo se resuelve el método de falsa posición compuesta? 503.

1. Véase el tercer tomo de los *Problemas de Aritmética* del autor.

REGLA DE CAMBIO

506. — **Regla de cambio** es aquella en que están ligados entre sí la incógnita y los datos por puras equivalencias, y sirve para encontrar el valor de una medida, pesa ó moneda de un país, en otro país, ó bien para saber qué cantidad de un efecto puede darse en cambio de otro, cuando entre ellos hay objetos intermediarios.

507. — Para resolverla, se escriben unos debajo de otros, los datos del problema, en forma de *ecuaciones*, cuidando :

1° Que el primer miembro de la primera ecuación sea la incógnita.

2° Que el segundo miembro de cada ecuación sea homogéneo del primero de la siguiente.

3° Que el segundo miembro de la última ecuación sea el homogéneo de la incógnita.

Dispuesta así la operación, el valor de la incógnita es un quebrado que tiene por numerador el producto de los segundos miembros y por denominador el de los primeros. EJEMPLO¹ :

1. Véase el tercer tomo de los *Problemas de Aritmética* del autor.

Se quiere saber cuántos rublos de Rusia valen 7,500 pesos mexicanos, en el concepto de que 1 peso vale 5 francos de Francia, 48 francos valen 52 chelines de Inglaterra, 15 chelines hacen 6 florines de Alemania, 50 florines equivalen á 7 ducados de Hamburgo, y 14 ducados equivalen á 40 rublos de Rusia.

PLANTEO DEL PROBLEMA

X Rublos de Rusia = \$ 7500 mexicanos.

1 peso mexicano. = 5 francos de Francia.

48 francos = 52 chelines de Inglaterra.

15 chelines. . . . = 6 florines de Alemania.

50 florines = 7 ducados de Hamburgo.

14 ducados. . . . = 40 Rublos de Rusia.

$$X = \frac{7500 \times 5 \times 52 \times 6 \times 7 \times 40}{1 \times 48 \times 15 \times 50 \times 14} = 6500 \text{ rublos de Rusia}$$

Cuestionario.

¿Qué cosa es regla de cambio? 506. — ¿Cómo se resuelve la regla de cambio? 507.

EQUIVALENCIA del peso mexicano con la moneda de oro de los países que tienen establecido el patrón de oro.

Países.	Valor del peso mexicano en moneda extranjera.
Alemania	2.09 marcos
Argentina	0.516 pesos
Austria-Hungría	2.45 coronas
Bélgica	2.58 francos
Bulgaria	2.58 levas
Brasil	0.912 milreis
Canadá	0.498 dólares
Chile	1.36 pesos
Costa Rica	1.07 colonos
Colombia	0.498 dólares
Dinamarca	1.86 coronas
España	2.58 pesetas
Egipto	24.24 peniques
Estados Unidos	0.498 dólares
Ecuador	1.02 sucres
Francia	2.58 francos
Finlandia	2.58 marcos
Grecia	2.58 dracmas
Haití	0.516 gourdes
Honduras británica	0.498 dólares
Inglaterra	24.58 peniques
Italia	2.58 liras
Imperio Otomano	11.36 piastras
India	1.53 rupias
Islas Filipinas	0.996 pesos
Japón	1.00 yens
Liberia	0.498 dólares
Mónaco	2.58 francos
Noruega	1.86 coronas
Panamá	0.498 balboas
Países Bajos	1.23 florines
Portugal	0.461 milreis
Perú	1.02 soles
Rusia	0.967 rublos
Rumanía	2.58 leus
Suiza	2.58 francos
Servia	2.58 dinares
Suecia	1.86 coronas
Terranova	0.491 dólares
Uruguay	0.481 pesos
Venezuela	2.58 bolívars

PERMUTACIÓN

508. — **Permutación** es la regla que sirve para descubrir de cuántas maneras diferentes puede colocarse un número de objetos dado.

509. — **Para resolver esta regla**, se multiplica la serie natural de los números, desde 1 hasta el número de objetos, y el producto será el número buscado. EJEMPLO :

¿En cuántas diversas posiciones pueden sentarse 6 alumnos en una banca?

RESOLUCIÓN. — $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$.

COMBINACIÓN

510. — **Combinación** es la regla que sirve para descubrir de cuántas maneras diferentes puede combinarse un número menor de objetos con otro mayor.

511. — **Para resolver esta regla**, se multiplica la serie *decreciente* de cifras desde el número que ha de combinarse hasta completar el de com-

binaciones, y el producto se divide por el número de permutaciones. EJEMPLO¹ :

Con 10 colores ¿cuántos se pueden formar, tomándolos de 5 en 5?

$$X = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = \frac{30240}{120} = 252.$$

Cuestionario.

¿Qué es permutación? 508. — ¿Cómo se resuelve un problema de permutación? 509. — ¿Qué es combinación? 510. — ¿Cómo se resuelve un problema de combinación? 511.

Problemas diversos.

242. — ¿Cuánto importan 25 metros de paño á razón de 9,75 el metro con un descuento de 5 por ciento?

243. — ¿Cuál es el rédito de \$ 2536,87 al 9 0/0 anual en 7 años 4 meses?

244. — ¿Qué capital colocado al 8 0/0 anual produce al cabo de 7 años el rédito de 9728 pesos?

245. — El rédito de 6 000 pesos es de 300 pesos al cabo de un año ¿Cuál es el tanto por ciento?

246. — ¿Durante qué tiempo debo imponer 27,000 pesos al 6 0/0 para obtener 2,750 pesos de rédito?

247. — Una persona impone 2 500 pesos al 4 0/0 de interés compuesto ¿A cuánto ascenderán los réditos al cabo de 3 años?

248. — ¿Cuánto debe recibir una persona que descuenta al 6 0/0 una letra de 975 pesos pagadera dentro de 27 días?

249. — Se quieren repartir 20 pesos entre tres niños proporcionalmente á la edad de cada uno ¿Cuánto le tocará á cada uno, sabiendo que el primero tiene 10 años, el segundo 6 años y el tercero 4 años?

250. — Mezclando 120 litros de vino de á 80 centavos el litro con 1 hectolitro de vino de á 75 centavos el litro y 5 litros de aguardiente de á 90 centavos el litro ¿A cómo sale el litro de la mezcla?

1. Véase el tercer tomo de la *Colección de Problemas de Aritmética* del autor.

APÉNDICE

TABLA de conversión de algunas unidades del antiguo sistema de pesas y medidas en las correspondientes del sistema métrico decimal.

UNIDADES DE LONGITUD

Varas en metros. 1 = 0^m,838 2 = 1^m,676 3 = 2^m,514 4 = 3^m,352 5 = 4^m,190 6 = 5^m,028 7 = 5^m,866 8 = 6^m,704 9 = 7^m,542	Medias en metros. 1 = 0^m,419 2 = 0^m,838 3 = 1^m,257 4 = 1^m,676 5 = 2^m,095 6 = 2^m,514 7 = 2^m,933 8 = 3^m,352 9 = 3^m,771
Tercias en metros. 1 = 0^m,279 (3) 2 = 0^m,558 (6) 3 = 0^m,838 4 = 1^m,117 (3) 5 = 1^m,39 (6) 6 = 1^m,676 7 = 1^m,955 (3) 8 = 2^m,234 (6) 9 = 2^m,514	Cuartas en metros. 1 = 0^m,2095 2 = 0^m,4190 3 = 0^m,6285 4 = 0^m,838 5 = 1^m,0475 6 = 1^m,2570 7 = 1^m,4665 8 = 1^m,676 9 = 1^m,8855

UNIDADES DE LONGITUD

Pulgadas en metros.	Leguas en kilómetros.
1 = 0 ^m ,0232 (7)	1 = 4 ^{km} ,19
2 = 0 ^m ,046 (5)	2 = 8 ^{km} ,38
3 = 0 ^m ,0698 (3)	3 = 12 ^{km} ,57
4 = 0 ^m ,093 (1)	4 = 16 ^{km} ,76
5 = 0 ^m ,1163 (8)	5 = 20 ^{km} ,95
6 = 0 ^m ,139 (6)	6 = 25 ^{km} ,14
7 = 0 ^m ,1629 (4)	7 = 29 ^{km} ,33
8 = 0 ^m ,186 (2)	8 = 33 ^{km} ,52
9 = 0 ^m ,2095	9 = 37 ^{km} ,71

EJEMPLO. — Sea por convertir en medidas nuevas 25 varas — 2 pies — 17 pulgadas.

20 varas	valen.	16 ^m ,76
5 varas	—	4 ^m ,19
2 pies	—	0 ^m ,5586
10 pulgadas	—	0 ^m ,2327
7 pulgadas	—	0 ^m ,16294
		21 ^m ,90424

UNIDADES DE SUPERFICIE

Varas cuadradas en m ² .	Medias cuadradas en m ² .
1 = 0 ^{m2} ,702244	1 = 0 ^{m2} ,175561
2 = 1 ^{m2} ,404488	2 = 0 ^{m2} ,351122
3 = 2 ^{m2} ,106732	3 = 0 ^{m2} ,526683
4 = 2 ^{m2} ,808976	4 = 0 ^{m2} ,702244
5 = 3 ^{m2} ,511220	5 = 0 ^{m2} ,877805
6 = 4 ^{m2} ,213464	6 = 1 ^{m2} ,053366
7 = 4 ^{m2} ,915708	7 = 1 ^{m2} ,228927
8 = 5 ^{m2} ,617952	8 = 1 ^{m2} ,404488
9 = 6 ^{m2} ,320196	9 = 1 ^{m2} ,580049

UNIDADES DE SUPERFICIE

Pies cuadrados en m². 1 = 0m²,078027 (1) 2 = 0m²,156054 (2) 3 = 0m²,234081 (3) 4 = 0m²,312108 (4) 5 = 0m²,39013 (5) 6 = 0m²,468162 (6) 7 = 0m²,546189 (7) 8 = 0m²,624216 (8) 9 = 0m²,702244	Haciendas en Ha. 1 = 8778,05 2 = 17556,10 3 = 26334,15 4 = 35122,20 5 = 43890,25 6 = 52668,30 7 = 61446,35 8 = 70224,40 9 = 79002,45
Sitios de ganado mayor en Ha. 1 = 1755,61 2 = 3511,22 3 = 5266,83 4 = 7022,44 5 = 8778,05 6 = 10533,66 7 = 12289,27 8 = 14044,88 9 = 15800,49	Sitios de ganado menor en Ha. 1 = 780,2711 2 = 1560,5422 3 = 2340,8133 4 = 3121,0844 5 = 3901,3555 6 = 4681,6266 7 = 5461,8977 8 = 6242,1688 9 = 7022,44
Criaderos de ganado mayor en Ha. 1 = 438,9025 2 = 877,8050 3 = 1316,7075 4 = 1755,6100 5 = 2194,5125 6 = 2633,4150 7 = 3072,3175 8 = 3511,2200 9 = 3950,1225	Criaderos de ganado menor en Ha. 1 = 195,0677 2 = 390,1355 3 = 585,2033 4 = 780,2711 5 = 975,3388 6 = 1170,4066 7 = 1365,4744 8 = 1560,5422 9 = 1755,6100

Caballería de tierra en Ha.

1 = 42,795311

2 = 85,590622

3 = 128,385933

4 = 171,181244

5 = 213,976555

6 = 256,771866

7 = 299,567178

8 = 342,362489

9 = 385,157800

UNIDADES DE VOLUMEN

Varas cúbicas en m³.

1 = 0m³,588480472

2 = 1m³,176960944

3 = 1m³,765441416

4 = 2m³,353921888

5 = 2m³,942402360

6 = 3m³,530882832

7 = 4m³,119363304

8 = 4m³,707843776

9 = 5m³,296324248

Pies cúbicos en m³.

1 = 0m³,021795573

2 = 0m³,043591146

3 = 0m³,065386719

4 = 0m³,087182292

5 = 0m³,108977865

6 = 0m³,130773438

7 = 0m³,152569011

8 = 0m³,174364584

9 = 0m³,196160157

UNIDADES DE CAPACIDAD

Cargas en Hl.

1 = 1^{Hl},81629775

2 = 3^{Hl},63259550

3 = 5^{Hl},44889325

4 = 7^{Hl},26519100

5 = 9^{Hl},08148875

6 = 10^{Hl},89778650

7 = 12^{Hl},71408425

8 = 14^{Hl},53038200

9 = 16^{Hl},34667975

Fanegas en Dl.

1 = 9^{Dl},08148875

2 = 18^{Dl},16297750

3 = 27^{Dl},24446625

4 = 36^{Dl},32595500

5 = 45^{Dl},40744375

6 = 54^{Dl},48893250

7 = 63^{Dl},57042125

8 = 72^{Dl},65191000

9 = 81^{Dl},73339875

UNIDADES DE CAPACIDAD

Almudes en litros.	Cuartillos para aridos en litros.
1 = 7 ^l ,567907291	1 — 4 ^l ,89197682
2 = 15 ^l ,135814584	2 — 3 ^l ,78395364
3 = 22 ^l ,703721876	3 — 5 ^l ,67593046
4 = 30 ^l ,271629168	4 — 7 ^l ,56790728
5 = 37 ^l ,839536460	5 — 9 ^l ,45988410
6 = 45 ^l ,407443752	6 — 11 ^l ,35186092
7 = 52 ^l ,975351044	7 — 13 ^l ,24383774
8 = 60 ^l ,543258336	8 — 15 ^l ,13581456
9 = 68 ^l ,11165628	9 — 17 ^l ,02779138

Jarras en litros.	Cuartillos para líquidos en litros.
1 — 8 ^l ,212752	1 — 0 ^l ,456264
2 — 16 ^l ,425504	2 — 0 ^l ,912528
3 — 24 ^l ,638256	3 — 1 ^l ,368792
4 — 32 ^l ,851008	4 — 1 ^l ,825056
5 — 41 ^l ,063760	5 — 2 ^l ,281320
6 — 49 ^l ,276512	6 — 2 ^l ,737584
7 — 57 ^l ,489264	7 — 3 ^l ,193848
8 — 65 ^l ,702016	8 — 3 ^l ,650112
9 — 73 ^l ,914768	9 — 4 ^l ,106376

UNIDADES DE PESO

Quintales en Kg.	Arrobas en Kg.
1 — 46 ^{kg} ,024634	1 — 11 ^{kg} ,5061585
2 — 92 ^{kg} ,049268	2 — 23 ^{kg} ,0123170
3 — 138 ^{kg} ,073902	3 — 34 ^{kg} ,5184755
4 — 184 ^{kg} ,098536	4 — 46 ^{kg} ,0246340
5 — 230 ^{kg} ,123170	5 — 57 ^{kg} ,5307925
6 — 276 ^{kg} ,147804	6 — 69 ^{kg} ,0369510
7 — 322 ^{kg} ,172438	7 — 80 ^{kg} ,5431095
8 — 368 ^{kg} ,197072	8 — 92 ^{kg} ,0492680
9 — 414 ^{kg} ,221706	9 — 103 ^{kg} ,5554265

UNIDADES DE PESO

Libras en Kg.	Onzas en gramos.
1 — 0kg,46024634	1 — 28g,76539625
2 — 0kg,92049268	2 — 57g,53079250
3 — 1kg,38073902	3 — 86g,29618875
4 — 1kg,84098536	4 — 115g,06158500
5 — 2kg,30123170	5 — 143g,82698125
6 — 2kg,76147804	6 — 172g,59237750
7 — 3kg,22172438	7 — 201g,35777375
8 — 3kg,68197072	8 — 230g,12317000
9 — 4kg,14221706	9 — 258g,88856625

Adarmes en gramos.	Tomines en gramos.
1 — 1g,797837	1 — 0g,599279
2 — 3g,595674	2 — 1g,198558
3 — 5g,393511	3 — 1g,797837
4 — 7g,191349	4 — 2g,397116
5 — 8g,989186	5 — 2g,996395
6 — 10g,787023	6 — 3g,595674
7 — 12g,584860	7 — 4g,194953
8 — 14g,382698	8 — 4g,794232
9 — 16g,180535	9 — 5g,393511

Granos en gramos.

- 1 — 0g,049939
- 2 — 0g,099879
- 3 — 0g,149819
- 4 — 0g,199759
- 5 — 0g,249699
- 6 — 0g,299639
- 7 — 0g,349579
- 8 — 0g,399519
- 9 — 0g,449459

ÍNDICE

Nociones preliminares.	5
Sistema de numeración	40
Números romanos	46
SISTEMA MÉTRICO. — Nociones generales.	24
Abreviaturas.	27
Operaciones principales del cálculo.	30
Adición.	31
Substracción.	37
Multiplicación	42
División.	51
Abreviaciones de la multiplicación y división.	59
Divisibilidad de los números.	61
Factores y divisores.	62
Menor múltiplo.	65
Máximo común divisor.	66
Quebrados comunes	71
Sumar quebrados	76
Restar quebrados	79
Multiplicar quebrados.	82
Dividir quebrados.	85
Conversión de los quebrados comunes en decimales y vice-versa	90
Denominados	95
Operaciones con los denominados.	97
Sumar denominados.	102
Restar denominados	103
Multiplicar denominados.	104
Dividir denominados.	106
SISTEMA MÉTRICO. — Estudio detallado.	108
Medidas de longitud.	111
Medida de las longitudes y de las circunferencias.	119
Medidas de superficie	122
Cálculo de las superficies.	130
Medidas de volumen.	134
Cálculo de los volúmenes.	141
Tabla de densidades.	143
Medidas de capacidad	144
Cálculo de las capacidades.	152
Medidas de peso.	153

Unidades de moneda.	160
Tabla de las monedas mexicanas.	164
Cuadrado y raíz cuadrada.	170
Aplicaciones geométricas.	175
Cubo y raíz cúbica.	179
Raíces superiores al cubo.	183
Razones y proporciones.	186
Progresión aritmética.	198
Progresión geométrica.	199
Logaritmos.	202
Regla para encontrar el logaritmo de un número.	203
Regla para encontrar el número á que corresponde un logaritmo.	205
Aplicaciones de los logaritmos.	206
TABLAS DE LOGARITMOS.	209
Regla de tres.	220
Regla de tres simple.	220
Regla de tres compuesta.	222
Regla de compañía.	226
Regla de partición.	227
Regla de interés.	228
Interés simple.	228
Interés compuesto.	230
Annualidades.	232
Regla de descuento.	233
Regla de aligación.	235
Plazo común.	236
Falsa posición simple.	238
Falsa posición compuesta.	239
Reducción á la unidad.	241
Regla de cambio.	244
Equivalencia de las diversas monedas extranjeras en rela- ción con el peso mexicano.	246
Permutación.	247
Combinación.	247

APÉNDICE

Tablas de conversión de algunas unidades del antiguo sistema de pesas y medidas en las correspondientes del sistema métrico decimal.	249
--	-----

Theriacal

de

Emique & guaiac

OBRAS DEL MISMO AUTOR
DE VENTA
EN LA LIBRERÍA DE LA V^a DE C. BOURET
45, AVENIDA CINCO DE MAYO, 45
MÉXICO

Tratado de aritmética teórico-práctica; traducida del francés, reformada y adaptada á la ley reglamentaria de instrucción del Distrito Federal.

Sistema métrico decimal internacional de pesas y medidas.

Tablas de equivalencias.

Colección de Problemas y Ejercicios de Aritmética. Divertidos é instructivos con cuestiones sobre economía doméstica, comercio, geografía, estadística, historia, astronomía, física, geometría, etc., seguida de una clave de soluciones para uso del Profesor, impresa por acuerdo del C. Presidente de la República y declarada de texto para las Escuelas Nacionales.

1^a PARTE.

SOLUCIONES DE LA 1^a PARTE.

2^a PARTE.

SOLUCIONES DE LA 2^a PARTE.

3^a PARTE.

SOLUCIONES DE LA 3^a PARTE.